MVE025/MVE295

Ruben Seyer <rubense@student.chalmers.se>

31 oktober 2019

Satser markerade med * är på listan. Övriga resultat är av intresse för bevisen, eller för svårare uppgifter. Materialet presenteras med reservation för eventuella fel – se över och tänk igenom själv för bästa möjliga förståelse!

Förteckning över satser

Definition (Komplex deriverbarhet)**.** Låt $G \subseteq \mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}$ och $z_0 \in G$. Då är f **komplext deriverbar** om det existerar $f'(z_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$. Om G är öppen och f komplext deriverbar i hela G så kallas f **holomorf** i G.

Sats* (2.13, Cauchy-Riemanns ekvationer)**.** *Låt $G \subseteq \mathbb{C}$ öppen, $f : G \to \mathbb{C}$, $u(z) := \mathrm{Re}(f(z))$, $v(z) := \mathrm{Im}(f(z))$.*

(a) Om f holomorf i G så löser u,v CR:s ekvationer:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \iff \frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$$

(b) Om $f \in C^1$ (dvs. har kont. partiella derivator) och u,v löser CR:s ekvationer så är f holomorf.

Bevis. (a) Om f är holo i G så existerar $f'(z_0)$ $\forall z_0 \in G$. Gränsvärdet $f'(z_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ är då oberoende av riktning.

Låt $h = \Delta x$ vara reellt. Då, enligt def. av partiell derivata:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z_0+\Delta x)-f(z_0)}{\Delta x} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

Låt $h = i\Delta y$ vara imaginärt och p.s.s. (obs $1/i = -i$)

$$f'(z_0) = \lim_{i\Delta y \to 0} \frac{f(z_0+i\Delta y)-f(z_0)}{i\Delta y} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$$

Sätt de två uttrycken för $f'(z_0)$ lika och betrakta real- och imag.del för sig (eller läs mittenleden direkt) så fås CR:s ekv.

(b) Kommer visa att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \overset{?}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

Skriv $h = \Delta x + i\Delta y$. Då $f \in C^1$ så är f diff.bar, vilket medför

$$\begin{aligned} f(z_0+\Delta x+i\Delta y) - f(z_0) &= f'_x(z_0)\Delta x + f'_y(z_0)\Delta y + o(|\Delta x + i\Delta y|) = \\ &= \{f'_y = if'_x\} = f'_x(z_0)\Delta x + if'_x(z_0)\Delta y + o(|\Delta x + i\Delta y|) = \\ &= f'_x(z_0)(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta x + i\Delta y|) \end{aligned}$$

$$\implies \frac{f(z_0+\Delta x+i\Delta y)-f(z_0)}{\Delta x + i\Delta y} = \underbrace{f'_x(z_0)}_{\text{fix}} + \underbrace{\frac{o(|\Delta x + i\Delta y|)}{\Delta x + i\Delta y}}_{o \text{ dominerar}} \xrightarrow[h\to 0]{} f'_x(z_0)$$

dvs gränsvärdet finns för godt. $z_0 \in G$ och speciellt då f holomorf. $\square$

Definition (Konform avbildning)**.** En avbildning $f : G \to \mathbb{C}$ är **konform** om den bevarar vinkeln mellan deriverbara kurvor.

Lemma (Holomorfa kedjeregeln)**.** *Om f holomorf och γ är en deriverbar kurva så är $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$.*

Bevis. Enligt kedjeregeln i flervariabelmening gäller

$$(f \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \operatorname{Re} \gamma'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \operatorname{Im} \gamma'(t) = \{\frac{\partial f}{\partial y} \overset{\text{CR}}{=} i\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} = f'\} =$$
$$= f'(\gamma(t)) \operatorname{Re} \gamma'(t) + if'(\gamma(t)) \operatorname{Im} \gamma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$$

□

Proposition (2.11, satsen om konforma avb.)**.** *Om f holomorf och $f' \neq 0$ så är f konform.*

Bevis. Låt $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ vara två deriverbara kurvor som möts i $a = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, och vi antar $\gamma_1'(0) \neq 0$, $\gamma_2'(0) \neq 0$.

Vinkeln mellan γ_1 och γ_2 i a ges av

$$\theta := \arg(\gamma_2'(0)) - \arg(\gamma_1'(0))$$

medan vinkeln mellan $f \circ \gamma_1$ och $f \circ \gamma_2$ i $f(a)$ ges av

$$\psi := \arg((f \circ \gamma_2)'(0)) - \arg((f \circ \gamma_1)'(0))$$

Men enligt lemma gäller $(f \circ \gamma_j)'(0) = f'(a)\gamma_j'(0)$, $j = 1{,}2$ tillsammans med $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$

$$\psi = \arg(f'(a)\gamma_2'(0)) - \arg(f'(a)\gamma_1'(0)) =$$
$$= \cancel{\arg(f'(a))} + \arg(\gamma_2'(0)) - \cancel{\arg(f'(a))} - \arg(\gamma_1'(0)) = \theta$$

□

Proposition (4.6d, triangelolikheten för integraler)**.**

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \le \max_{z\in\gamma}|f(z)||\gamma|$$

Bevis. Skriv $\int_\gamma f\,dz = \left|\int_\gamma f\,dz\right| e^{i\theta}$ där $\theta = \arg(\int_\gamma f\,dz)$. Då gäller

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| = \int_\gamma f\,dz\cdot e^{-i\theta} = \int_\gamma e^{-i\theta} f\,dz = \int_a^b e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt =$$
$$= \int_a^b \underbrace{\operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\right)}_{\operatorname{Re} g(t)\le|g(t)|}\,dt + i\int_a^b \underbrace{\operatorname{Im}\left(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\right)}_{=0 \text{ ty VL reellt}}\,dt \le$$
$$\le \int_a^b |e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \underbrace{|e^{-i\theta}|}_{=1}\ \underbrace{|f(\gamma(t))|}_{\le\max_{z\in\gamma}|f(z)|}\ |\gamma'(t)|\,dt \le$$
$$\le \max_{z\in\gamma}|f(z)|\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \overset{\text{def}}{=} \max_{z\in\gamma}|f(z)||\gamma|$$

□

Anmärkning (fundamentalt exempel)*.* Beräkna $\int_{|z|=1} z^k\,dz$, $k\in\mathbb{Z}$. Parametrisera med $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.

$$\int_\gamma z^k\,dz = \int_0^{2\pi}\left(e^{it}\right)^k ie^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi}\left(e^{it}\right)^{k+1}\,dt =$$
$$= i\int_0^{2\pi}\left(\cos((k+1)t) + i\sin((k+1)t)\right)\,dt = \begin{cases} 0 & k\ne -1 \text{ p.g.a. symmetri} \\ 2\pi i & k=-1\end{cases}$$

Definition (Homotopi)**.** Låt γ_0,γ_1 vara två slutna kurvor i ett område G. Vi kallar dem **homotopa i** G ($\gamma_0 \sim_G \gamma_1$) om det finns en kontinuerlig funktion $\gamma(t,s) : [a,b]\times[0,1]\to G$ s.a.

(i) $\gamma(t,0) = \gamma_0(t)\ \forall t\in[a,b]$

(ii) $\gamma(t,1) = \gamma_1(t)\ \forall t\in[a,b]$

(iii) $\gamma(a,s) = \gamma(b,s)\ \forall s\in[0,1]$

Funktionen γ kallas för en **homotopi**.

Definition (0-homotop)**.** Om γ är en sluten kurva i G som är homotop med en punkt i G (dvs en konstant kurva $\gamma_p(t)\equiv p$) så kallas γ **kontraherbar** eller **0-homotop** ($\gamma \sim_G 0$).

Sats* (4.18+4.20, Cauchys sats). *Antag f holomorf i G och γ_0,γ_1 slutna styckvis glatta kurvor i G s.a. $\gamma_0 \sim_G \gamma_1$. Då gäller*

$$\int_{\gamma_0} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz$$

och speciellt om γ sluten st. gl. och $\gamma \sim_G 0$ så $\int_\gamma f\,dz = 0$.

Bevis. Antag att $f \in C^1$ (f var holo) och att homotopin γ mellan γ_0,γ_1 är styckvis C^2. Låt $\gamma_s(t) := \gamma(t,s)$. Betrakta nu

$$I(s) :_= \int_{\gamma_s} f\,dz = \int_a^b f(\gamma(t,s))\frac{\partial\gamma}{\partial t}\,dt$$

Enligt antaganden är det tillåtet att derivera under integraltecknet m.a.p. s:

$$\frac{dI}{ds} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\left(f(\gamma(t,s))\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)\,dt$$

Vi utför deriveringen av integranden. Då f holo används holo kedjeregeln:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(f(\gamma(t,s))\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(f(\gamma(t,s))\right)\frac{\partial\gamma}{\partial t} + f(\gamma(t,s))\frac{\partial^2\gamma}{\partial s\,\partial t} =$$
$$= f'(\gamma(t,s))\frac{\partial\gamma}{\partial s}\frac{\partial\gamma}{\partial t} + f(\gamma(t,s))\frac{\partial^2\gamma}{\partial s\,\partial t}$$

Med symmetrin i s,t kan vi p.s.s. betrakta

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f(\gamma(t,s))\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right) = f'(\gamma(t,s))\frac{\partial\gamma}{\partial t}\frac{\partial\gamma}{\partial s} + f(\gamma(t,s))\frac{\partial^2\gamma}{\partial s\,\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(f(\gamma(t,s))\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)$$

Vi utnyttjar detta uttryck för derivatan. Analysens huvudsats tillämpas i andra likheten, och det gäller att $\gamma(a,s) = \gamma(b,s)$ $\forall s$.

$$\Longrightarrow \frac{dI}{ds} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left(f(\gamma(t,s))\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right)\,dt = f(\gamma(b,s))\frac{\partial\gamma}{\partial s}(b,s) - f(\gamma(a,s))\frac{\partial\gamma}{\partial s}(a,s) = 0$$

Dvs. $I(s)$ oberoende av s. Speciellt gäller $\int_{\gamma_0} f\,dz = I(0) = I(1) = \int_{\gamma_1} f\,dz$.

Betrakta fallet då $\gamma \sim_G 0 \iff \gamma \sim_G \gamma_p$ där $\gamma_p(t) \equiv p$, dvs. $\gamma_p'(t) \equiv 0$. Enligt ovan $\int_\gamma f\,dz = \int_{\gamma_p} f\,dz = \int_a^b f(\underbrace{\gamma_p(t)}_{=p})\underbrace{\gamma_p'(t)}_{=0}\,dt = 0$. □

Sats* (4.24, Cauchys integralformel v1)**.** *Låt f vara holomorf i ett område G, $w \in G$ fixt, $R \in \mathbb{R}_{>0}$, $\overline{D}(w,R) \subseteq G$. Då gäller*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{z-w}\, dz \quad 0 < r \leq R$$

Bevis. Då $\frac{f(z)}{z-w}$ holo i $G \setminus \{w\}$ och $C(w,r)$, $0 < r \leq R$ alla homotopa i $G \setminus \{w\}$ medför Cauchys sats att värdet på integralen i HL är oberoende av r. Vidare har vi med variabelbyte enligt det fundamentala exemplet att

$$\int\limits_{|z-w|=r} \frac{dz}{z-w} = \int\limits_{|z|=r} \frac{dz}{z} = 2\pi i \implies \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-w|=r} \frac{dz}{z-w} = 1$$

Då $f(w)$ är en konstant eftersom w fixt kan vi multiplicera i båda led

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-w|=r} \frac{f(w)\, dz}{z-w} \tag{$\star$}$$

Genom att uppskatta skillnaden mellan leden ska vi visa att de faktiskt är lika i gräns.

$$0 \overset{?}{=} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-w|=r} \frac{f(z)\, dz}{z-w} - f(w) \right| \overset{(\star)}{=} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-w|=r} \frac{f(z) - f(w)}{z-w}\, dz \right| \leq$$

$$\overset{\Delta \int}{\leq} \frac{1}{\cancel{2\pi}} \max_{|z-w|=r} \frac{|f(z) - f(w)|}{\underbrace{\cancel{|z-w|}}_{=r}} \underbrace{\cancel{2\pi r}}_{|\gamma|} = \max_{|z-w|=r} |f(z) - f(w)| \xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

ty $f(z) \xrightarrow[r\to 0]{} f(w)$ då f kontinuerlig. Men integralen var alltså oberoende av r och skillnaden mellan leden $\to 0$ då $r \to 0 \implies$ lika med 0 och påst. följer. $\square$

Sats (Cauchys integralformel v2)**.** *Låt f vara holomorf i ett område G, $w \in G$ fixt, γ sluten st. gl. kurva i $G \setminus \{w\}$ och $\gamma \sim_{G\setminus\{w\}} C(w,r)$, $0 < r \ll 1$. Då gäller*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz$$

Sats* (5.1′, CIF för derivator)**.** *Låt f vara holomorf i ett område G, $w \in G$ fixt, $R \in \mathbb{R}_{>0}$, $\overline{D}(w,R) \subseteq G$. Då gäller*

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^2}\, dz \quad 0 < r \leq R$$

Bevis. Om $|h| < r$ så kommer $w + h \in D(w,r)$ och

$$f(w+h) \overset{\text{CIF}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{z-(w+h)}\, dz$$

$$\implies \frac{f(w+h)-f(w)}{h} \overset{\text{CIF}}{=} \frac{1}{2\pi i h} \int\limits_{|z-w|=r} f(z)\left(\frac{1}{z-w-h} - \frac{1}{z-w}\right) dz =$$

$$= \left[\frac{1}{z-w-h} - \frac{1}{z-w} = \frac{h}{(z-w-h)(z-w)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w-h)(z-w)}\, dz \xrightarrow[h\to 0]{?} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^2}\, dz$$

Vi måste motivera en sådan gränsövergång. Studera uppskattningen

$$\Big| \int\limits_{|z-w|=r} \frac{f(z)\, dz}{(z-w-h)(z-w)} - \int\limits_{|z-w|=r} \frac{f(z)\, dz}{(z-w)^2} \Big| =$$

$$= \left[\tfrac{1}{(z-w-h)(z-w)} - \tfrac{1}{(z-w)^2} = \tfrac{h}{(z-w-h)(z-w)^2}\right] = \Big| \int\limits_{|z-w|=r} \frac{f(z)h\, dz}{(z-w-h)(z-w)^2} \Big| \leq$$

$$\overset{\Delta\int}{\leq} \max_{|z-w|=r} \frac{|f(z)||h|}{|z-w-h||z-w|^2} 2\pi r \leq \left[\begin{array}{c} |z-w-h| \overset{\nabla}{\geq} |z-w| - |h| = \\ r - |h| \geq r/2 \text{ för } |h| < r/2 \end{array}\right] \leq$$

$$\leq \max_{|z-w|=r} \frac{|f(z)||h| 4\pi}{r^2} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Vi har alltså konvergens i gränsövergången under integralen. Gränsen av differenskvoten är lika med $f'(w)$ och påståendet följer. □

Anmärkning (Generalisering av CIF)*.* Allmänt gäller med ett lämpligt induktivt resonemang att

$$f^{(k)}(w) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|z-w|=r} \frac{f(w)}{(z-w)^{k+1}}\, dz$$

Speciellt är alltså alla derivator av f holomorfa.

Korollarium* (5.13, Liouvilles sats)**.** *Om f hel (holo i $\mathbb{C}$) och begränsad (dvs. $|f| \leq M < \infty$) så är f konstant.*

Bevis. Tag godt. $w \in \mathbb{C}$. Eftersom f holo på $\overline{D}(w,r) \subseteq \mathbb{C}$ gäller

$$f'(w) \overset{\text{CIFd}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^2}\, dz$$

$$\implies |f'(w)| \overset{\Delta \int}{\leq} \frac{1}{\cancel{2\pi}} \max_{|z-w|=r} \frac{|f(z)|}{\underbrace{|z-w|}_{=r}{}^{\cancel{2}}} \cancel{2\pi r} = \max_{|z-w|=r} \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{M}{r}$$

Men då f hel kan vi göra den inneslutande cirkeln godt. stor dvs. $r \to \infty$. $\implies |f'(w)| = 0 \underset{w \text{ godt.}}{\implies} f' \equiv 0 \underset{\text{Sats}}{\implies} f$ konstant. □

Lemma. *Givet $p(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{C}$ kan man välja $R \gg 0$ s.a. $|p(z)| \geq |z|^n/2$ då $|z| \geq R$.*

Bevis.

$$\left|\frac{p(z)}{z^n}\right| = \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \overset{\nabla}{\geq} 1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|z^n|} \geq \frac{1}{2}$$

om $|z|$ tillräckligt stort t.ex. om $|z| \geq R \geq 2n \max\{|a_i|,1\}$. □

Sats* (5.11, Algebrans fundamentalsats)**.** *Låt $p(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{C}$. Då finns $z_0 \in \mathbb{C} : p(z_0) = 0$.*

Bevis. Antag motsatsen, dvs. $p(z) \neq 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$. Då blir $f(z) := \frac{1}{p(z)}$ hel. Välj R som i lemma.

$$\implies |f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{2}{|z|^n} \leq \frac{2}{R^n}$$

och vi får en begränsing då $|z| \geq R$. Men $|f|$ är kont. och $\overline{D}(0,R)$ kompakt $\implies |f| \leq c$ på $\overline{D}(0,R)$ för ngt. c enligt sats.

$$\implies |f| \leq \max\{\frac{2}{R^n}, c\} < \infty \text{ på } \mathbb{C} \underset{\text{Liouville}}{\implies} f \text{ konst.} \implies p \text{ konst.}$$

vilket är en motsägelse då enligt förutsättningar $n = \deg p \geq 1$. □

Sats (Moreras sats)**.** *Om f kontinuerlig i området G och $\int_\gamma f\, dz = 0$ för alla st. gl. slutna γ i G, då är f holo i G.*

Sats* (8.8, Taylorutveckling)**.** *Antag f holo i $D(z_0,R)$. Då har f en Taylorutveckling i $D(z_0,R)$ (låt $r < R$)*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \qquad c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz$$

Bevis. Antag först $z_0 = 0$. Välj $z \in D(0,R)$ och r s.a. $|z| < r < R$.

$$f(z) \overset{\text{CIF}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r} \frac{f(w)}{w} \cdot \frac{1}{1 - z/w}\, dw$$

Notera $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{r} < 1 \implies \frac{1}{1-z/w} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k$. Gör denna omskrivning

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r} \frac{f(w)}{w} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k\, dw$$

Då $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k$ likf. konv. på $C(0,r)$ (sats 7.31) och $\left|\frac{f(w)}{w}\right| \leq M$ på $C(0,r)$ ty cirkeln kompakt och f kont. $\implies \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w} \left(\frac{z}{w}\right)^k$ likf. konv. på $C(0,r)$ (enligt sats kan vi flytta in begränsad fkn). Enligt sats 7.27 kan vi nu byta plats på summa- och integraltecken:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r} \frac{f(w) z^k}{w^{k+1}}\, dw = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\, dw = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

För $z_0 \neq 0$ låt $w = z - z_0$, $g(w) := f(z)$, g holo i $D(0,R)$

$$\implies f(z) = g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \qquad c_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

$\square$

Sats* (8.14, klassifikation av nollställen/holo faktorsats)**.** *Om f holo i G och $f(z_0) = 0$, då antingen*

(i) $f \equiv 0$ i G, eller

(ii) $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $m \geq 1$, g holo i G, $g(z_0) \neq 0$.

Vi kallar z_0 nollställe av ordning m.

Bevis. Välj $r > 0$ s.a. $D(z_0,r) \subseteq G$. Kan då skriva $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ i $D(z_0,r)$.

Om $c_k \neq 0$ för ngt k, låt $m := \min\{k : c_k \neq 0\}$. Notera att $c_0 = f(z_0) = 0$ så $m \geq 1$. Vi får

$$f(z) = \sum_{k \geq m}^{\infty} c_k(z - z_0)^k = (z - z_0)^m \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m}(z - z_0)^k}_{=:g(z) \text{ holo i } D(z_0,r)} = (z - z_0)^m g(z)$$

Låt nu $g(z) := \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}$ holo i $G \setminus \{z_0\}$. Överenstämmer i snittet $D(z_0,r) \setminus \{z_0\}$. $\implies f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $m \geq 1$, g holo i G, $g(z_0) = c_m \neq 0$; fall (ii) ok.

Om $c_k = 0 \; \forall k \implies f \equiv 0$ i $D(z_0,r)$. Tag $z_1 \in D(z_0,r)$ s.a. $D(z_1,r_1) \subseteq G$. Vi kan skriva $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-z_1)^k$, men $d_k = \frac{f^{(k)}(z_1)}{k!} = 0 \; \forall k$ ty $f \equiv 0$ i $D(z_0,r)$. $\implies f \equiv 0$ i $D(z_1,r_1) \implies f \equiv 0$ i G induktivt; fall (i) ok. $\square$

Korollarium. *Om $f(z_0) = 0$ men $f \not\equiv 0$ då är z_0 ett isolerat nollställe dvs. $\exists r > 0$ s.a. $f(z) \neq 0$ i $D(z_0,r) \setminus \{z_0\}$.*

Bevis. $f \not\equiv 0 \overset{\text{klassif.}}{\implies} f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, g holo (speciellt kont.), $g(z_0) \neq 0 \implies \exists r > 0$ s.a. $g(z) \neq 0$ i $D(z_0,r) \implies f(z) \neq 0$ i $D(z_0,r) \setminus \{z_0\}$. $\square$

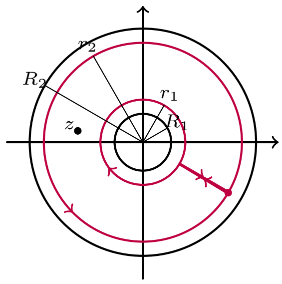
Sats* (8.15+16, Identitetsprincipen)**.** *Antag f,g holo i G, $f(z_n) = g(z_n)$ där z_n följd av distinkta punkter i G s.a. $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} z_\infty \in G$. Då är $f \equiv g$ i G.*

Bevis. Betrakta $h := f - g$ holo i G, då $h(z_n) = 0 \; \forall n$ och h kontinuerlig. $\implies h(z_\infty) = \lim_{n \to \infty} h(z_n) = 0$. $\implies z_\infty$ nollställe till h, ej isolerat ($z_n \to z_\infty$!). Enligt korollarium $\implies h \equiv 0$ dvs. $f \equiv g$. $\square$

Sats* (8.24, Laurentserieutveckling)**.** *Antag f holo i $A(z_0,R_1,R_2)$. Då kan f skrivas*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \ \textit{ i } A(z_0,R_1,R_2) \ \textit{där } c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}}$$

Bevis. Antag först $z_0 = 0$. Välj $z \in A(z_0,R_1,R_2)$ och r_1,r_2 s.a. $R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2$. Välj γ som i figur. Då $\gamma \sim_{A\setminus\{z\}} C(z,\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \ll 1$.



Figur 1: Diagram över kurvan γ (överlappar och tar ut sig själv mellan).

$$\implies f(z) \overset{\text{CIF}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=r_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=r_1} \frac{-f(w)}{w-z}\,dw}_{\text{II}}$$

De två cirklarna är kompakta och $f(w)/w$ kont. så $|f(w)/w| \le M$ på dem. Vi kan enligt sats flytta in en begränsad funktion i en likf. konv. serie och den nya serien är fortsatt likf. konv. Därför

$$I = \left[\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w}\frac{1}{1-z/w} \overset{|z/w|<1}{=} \frac{f(w)}{w}\sum_0^\infty \left(\frac{z}{w}\right)^k \overset{\text{Sats}}{=} \sum_0^\infty \frac{f(w)}{w^{k+1}} z^k\right] =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=r_2} \sum_0^\infty \frac{f(w)}{w^{k+1}} z^k\,dw \overset{\text{likf konv}}{=} \sum_0^\infty z^k \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=r_2} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw}_{c_k} = \sum_0^\infty c_k z^k$$

$$II = \left[\frac{-f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{z}\frac{1}{1-w/z} \overset{|w/z|<1}{=} \frac{f(w)}{z}\sum_0^\infty \left(\frac{w}{z}\right)^k \overset{\text{Sats}}{=} \sum_0^\infty \frac{f(w)}{z^{k+1}} w^k = \sum_{-\infty}^{-1} \frac{f(w)}{w^{k+1}} z^k\right] =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=r_1} \sum_{-\infty}^{-1} \frac{f(w)}{w^{k+1}} z^k\,dw \overset{\text{likf konv}}{=} \sum_{-\infty}^{-1} z^k \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=r_1} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw}_{c_k} = \sum_{-\infty}^{-1} c_k z^k$$

$\implies f(z) = I + II = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k z^k$

Om $z_0 \neq 0$ sätt $w := z - z_0$, $g(w) := f(z)$, g holo i $A(0,R_1,R_2) \implies f(z) = g(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k w^k = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ där $c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r} \frac{g(w)}{w^{k+1}}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz$. □

Sats* (4.1+4.2R, klassifikation av isol. singulariteter)**.** *Antag z_0 isol. sing. till f. Då är sing.*

(a) hävbar omm $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = 0$

(b) en pol omm $f(z) = g(z)(z-z_0)^{-m}$ i $D^\times(z_0,R)$, $m \geq 1$, g holo i $D(z_0,R)$, $g(z_0) \neq 0$. z_0 sägs vara pol av ordn. m.

Bevis (a). [$\implies$]: z_0 hävbar sing. $\implies f(z) = \tilde{f}(z)$, $\tilde{f}$ holo i $D(z_0,R)$.

$$\implies \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\tilde{f}(z) \overset{\tilde{f}\ \text{kont.}}{=} 0\cdot\tilde{f}(z_0) = 0$$

[$\impliedby$]: Låt

$$h(z) := \begin{cases}(z-z_0)^2 f(z), & z \in D^\times(z_0,R)\\ 0, & z = z_0\end{cases}$$

Klart h holo i $D^\times(z_0,R)$. Men även

$$\lim_{z\to z_0}\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \overset{\text{enl.ant.}}{=} 0$$

dvs. $h'(z_0) = 0$ och h holo i $D(z_0,R)$. Då kan vi TU:

$$h(z) = \sum_0^\infty c_k(z-z_0)^k \quad \text{m. } c_0 = h(z_0) = 0,\ c_1 = h'(z_0) = 0$$

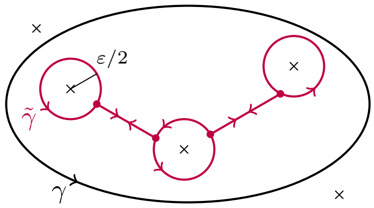
$$\implies h(z) = \sum_2^\infty c_k(z-z_0)^k = (z-z_0)^2 \underbrace{\sum_0^\infty c_{k+2}(z-z_0)^k}_{=:\tilde{f}\text{ holo i }D(z_0,R)}$$

Men $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^2} = \tilde{f}(z)$ också i $D^\times(z_0,R)$ dvs. sing. hävbar. □

Sats* (9.10, residysatsen)**.** *Antag f holo i G förutom isol. sing. z_k. Låt γ st. gl. sluten enkel pos. orient. kurva i G s.a. $\gamma \sim_G 0$ samt undviker sing. z_k. Då är*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \operatorname{int}(\gamma)} \operatorname{Res}_{z_k} f$$

Bevis. Numrera sing. i $\operatorname{int}(\gamma)$: $z_1, \ldots, z_N$. Välj $\varepsilon > 0$ s.a. $D(z_j,\varepsilon) \subseteq \operatorname{int}(\gamma)\ \forall j$ och s.a. ej skär varandra. Låt $\tilde{\gamma}$ vara som i figur:



Figur 2: Diagram över kurvan $\tilde{\gamma}$ (överlappar och tar ut sig själv mellan, hela kurvan runt motsvarar alltså cirklarna).

Får då $\gamma \sim_{G\setminus\{z_1,\ldots\}} \tilde{\gamma}$.

$$\implies \int_\gamma f\,dz \overset{\text{CS}}{=} \int_{\tilde{\gamma}} f\,dz = \sum_{j=1}^{N} \int_{|z-z_j|=\varepsilon/2} f(z)\,dz \qquad (*)$$

Då f holo i $D^\times(z_j,\varepsilon) \overset{\text{LSU}}{\implies} f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(z-z_j)^k$ i $D^\times(z_j,\varepsilon)$ och likf. konv. på $C(z_j,\varepsilon/2)$ (som ryms helt inuti).

$$\int\limits_{|z-z_j|=\varepsilon/2} f(z)\,dz = \int\limits_{|z-z_j|=\varepsilon/2} \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(z-z_j)^k\,dz \overset{\text{likf.konv}}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \int\limits_{|z-z_j|=\varepsilon/2} (z-z_j)^k\,dz \overset{\text{fund.ex}}{=} 2\pi i c_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_j} f$$

$$\implies (*) = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{|z-z_j|=\varepsilon/2} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} 2\pi i \operatorname{Res}_{z_j} f = 2\pi i \sum_{z_k \in \operatorname{int}(\gamma)} \operatorname{Res}_{z_k} f$$

□

Definition (Vindningstal)**.** Om γ sluten kurva i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ så definieras **vindningstalet** $W(\gamma)$ som antal varv γ går runt 0 i pos. riktn. netto. Observera: om γ st. gl. så $W(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z}$.

Sats* (3.2R, argumentprincipen)**.** *Antag f meromorf i G (dvs holo i G förutom poler), γ st. gl. sluten enkel pos. orient kurva i G, $\gamma \sim_G 0$, som undviker f:s nollställen och poler. Då gäller att $W(f\circ\gamma) = N(f,\gamma) - P(f,\gamma)$.*

Bevis. Numrera nollställena och polerna till f i $\operatorname{int}(\gamma)$ som $z_1,\ldots,z_N$ respektive $w_1,\ldots,w_M$. Låt n_i och m_j vara ordningen av z_i resp. w_j. Upprepad användning av klassifikationssatserna ger

$$f(z) = \prod_{i=1}^{N}(z-z_i)^{n_i}\prod_{j=1}^{M}(z-w_j)^{-m_j}g(z)$$

där g holo och nollskild i något område $H \supseteq \overline{\operatorname{int}(\gamma)}$.

$$\implies \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{N}\frac{n_i}{z-z_i} - \sum_{j=1}^{M}\frac{m_j}{z-w_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

dvs. f'/f holo i H utom isol. sing. z_i,w_j. Notera $\operatorname{Res}_{z_i} f'/f = n_i$ och $\operatorname{Res}_{w_j} f'/f = -m_j$.

$$W(f\circ\gamma) \overset{\text{obs}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{dz}{z} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{(f\circ\gamma)'(t)}{f(\gamma(t))}\,dt \overset{\text{HK}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)\,dt =$$
$$\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz \overset{\text{RS}}{=} \sum_{i=1}^{N} n_i - \sum_{j=1}^{M} m_j = N(f,\gamma) - P(f,\gamma)$$

□

Sats* (9.18, Rouchés sats)**.** *Antag f,g holo i G, γ st. gl. sluten enkel pos. orient kurva i G, $\gamma \sim_G 0$. Antag också $|f| > |g|$ på γ. Då har f och $f+g$ lika många nollställen i $\operatorname{int}(\gamma)$.*

Bevis. Notera $(f+sg)\circ\gamma$, $s\in[0,1]$ är en homotopi mellan $f\circ\gamma$ och $(f+g)\circ\gamma$ i $\mathbb{C}$.

$$|f(\gamma(t)) + sg(\gamma(t))| \overset{\nabla}{\geq} |f(\gamma(t))| - s|g(\gamma(t))| \overset{\text{enl ant}}{>} 0$$

om $s\in[0,1]$ enl. olikheten i antagande, dvs. $\forall s\in[0,1]$ $(f+sg)\circ\gamma$ speciellt kurva i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, och homotopin gäller där med.

$$N(f+g,\gamma) \overset{\text{arg.p}}{=} W((f+g)\circ\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(f+g)\circ\gamma}\frac{dz}{z} \overset{\text{CS}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{f\circ\gamma}\frac{dz}{z} = W(f\circ\gamma) \overset{\text{arg.p}}{=} N(f,\gamma)$$

eftersom $1/z$ holo i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ och kurvorna homotopa där. □

Sats (6.10, medelvärdesegenskapen)**.** *Om u harm. i G, $\overline{D}(w,R) \subseteq G$, då gäller $u(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w + Re^{it})\,dt$ (alltså medelvärdet på randen).*

Sats (6.11, maximumprincipen)**.** *Om u harm. i G och antar max i G (dvs $\exists w \in G : u(w) = \sup_{z\in G} u(z)$), då är u konstant.*
Svaga maximumprincipen: Om u harm. i begr. omr. G och u kont. på $\overline{G}$ då antar u max på ∂G.

Korollarium (6.13, harm. fkner lika på randen till kompakt omr.)**.** *Om u,v harm. i begr. omr. G, kont. på G och $u = v$ på ∂G då är $u = v$ i hela G.*

Korollarium (6.1, maximummodulusprincipen)**.** *Om f holo i G och $|f|$ antar max i G då är f konstant.*

Proposition (Egenskaper Fouriertransform)**.**

(a) $\widehat{af + bg} = a\hat{f} + b\hat{g}$

(b) $\widehat{f'(t)}(x) = ix\widehat{f(t)}(x)$

(c) $\widehat{f(t-a)}(x) = e^{-iax}\widehat{f(t)}(x)$

(d) $\widehat{f(at)}(x) = \frac{1}{|a|}\widehat{f(t)}(x/a)$

(e) $\widehat{tf(t)} = i(\hat{f})'$

(f) $\hat{\hat{f}}(t) = 2\pi f(-t)$ *(IF)*

(g) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2\,dx$ *(Parseval)*

(h) $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

(i) $\hat{f}(x) = \overline{\hat{f}(-x)}$ *om f reellvärd*

Proposition (Egenskaper Laplacetransform)**.**

(a) $\widetilde{af + bg} = a\tilde{f} + b\tilde{g}$

(b) $\widetilde{f'} = s\tilde{f} - f(0)$

(c) $\widetilde{f^{(n)}} = s^n\tilde{f} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

(d) $\widetilde{e^{ct}f} = \tilde{f}(s - c)$

(e) $\widetilde{f_a} = e^{-as}\tilde{f}$, *med* $f_a := \begin{cases} f(t-a) & t \geq a \\ 0 & 0 < t < a \end{cases}$

(f) $\widetilde{tf} = -(\tilde{f})'$

(g) $\widetilde{f * g} = \tilde{f} \cdot \tilde{g}$