MVE035

Ruben Seyer <rubense@student.chalmers.se>

14 mars 2019 (π)

Satser markerade med * ingår i Teori-PM som ”baskunskaper”. Notera att i Sats 6.1.3 ingår endast markerad del (övriga påståenden följer egentligen trivialt så fort integralen existerar). Materialet presenteras med reservation för eventuella fel – se över, tänk igenom och jämför själv för bästa möjliga förståelse!

Förteckning över satser

Sats* (2.2.3, varje C^1-funktion är differentierbar) 2
Sats* (2.3.4, kedjeregeln för sammansättning $f(g_1(t), \ldots, g_n(t))$) . 2
Sats* (2.5.9, Clairauts sats) 3
Sats* (2.6.10, Taylors formel av ordn. 2, två variabler) 4
Sats* (6.1.3, kontinuerliga f. integrerbara på kompakta rektanglar) 5
Proposition* (6.6.21, gaussisk integral) 5
Proposition* (7.2.7, volymen av n-dim. enhetsklotet) 6
Sats* (9.2.1, Greens sats) 7
Sats* (9.4.2, kurvintegralen av ett konservativt fält är en potentialdifferens) 8
Sats* (9.4.3, existens av potential under förutsättningar) 8
Sats* (10.5.3, varje potentialfält som är C^1 är virvelfritt.) 9
Sats* (10.2.1, Gauss divergenssats) 10
Sats* (10.3.2, Stokes sats) 12
Sats* (4.3.1, max/min-problem med två variabler, ett bivillkor) . 13

Sats* (2.2.3, varje C^1-funktion är differentierbar)**.** *Om $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är en domän så gäller $f \in C^1(D) \implies f$ differentierbar i D.*

Bevis ($n = 2$). Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och $(a,b) \in D$. Antag $f \in C^1(D)$. Vi vill visa att f då är diff. bar i godtyckligt (a,b). Betrakta

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \underbrace{[f(a+h,b+k) - f(a+h,b)]}_{x \text{ fixt}} + \underbrace{[f(a+h,b) - f(a,b)]}_{y \text{ fixt}} \tag{$\star$}$$

Eftersom $f \in C^1(D)$ finns enligt medelvärdessatsen f'_x, f'_y s.a. ($\star$) kan skrivas

$$= k \cdot f'_y(a+h, b+\theta_1 k) + h \cdot f'_x(a + \theta_2 h, b)$$

för några $\theta_1,\theta_2 \in (0,1)$. Eftersom även de partiella derivatorna är kontinuerliga kan detta vidare skrivas

$$= k\left[f'_y(a,b) + \rho_1(h,k)\right] + h\left[f'_x(a,b) + \rho_2(h,k)\right]$$

för feltermer $\rho_1,\rho_2 \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$.

Då kan ($\star$) skrivas

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b) + \rho(h,k)\cdot\sqrt{h^2+k^2}$$

där $\rho(h,k) = \dfrac{k\rho_1(h,k) + h\rho_2(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$.

Men $|\rho(h,k)| \leq |\rho_1(h,k)| + |\rho_2(h,k)| \to 0$, $(h,k) \to (0,0)$ och definitionen är uppfylld. □

Sats* (2.3.4, kedjeregeln för sammansättning $f(g_1(t),\dots,g_n(t))$)**.** *Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $g_1,\dots,g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alla funktioner differentierbara. Då gäller att sammansättningen $f(g_1(t),\dots,g_n(t))$ är en deriverbar funktion av t och*

$$\frac{d}{dt} f(g_1(t),\dots,g_n(t)) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p}\left(g_1(t),\dots,g_n(t)\right) \cdot \frac{dg_p}{dt}$$

Bevis. Fixera $a \in \mathbb{R}$. Låt $F(t) = f(g_1(t),\dots,g_n(t))$. Vi vill visa att $F'(a)$ existerar och ges av formeln, dvs.

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p}\left(g_1(t),\dots,g_n(t)\right) \cdot \frac{dg_p}{dt}$$

Per def. $F(a+h) = f(g_1(a+h),\dots,g_n(a+h))$, $F(a) = f(g_1(a),\dots,g_n(a))$. Varje g_p är deriverbar i $t = a$ och kan linjäriseras:

$$\implies g_p(a+h) = g_p(a) + h\cdot g'_p(a) + h\cdot\rho_p(h) \qquad \text{där } \rho_p(h) \to 0, h \to 0$$

Sätt $\boldsymbol{a} = (g_1(a),\dots,g_n(a))$, $\boldsymbol{h} = h\cdot(g'_1(a) + \rho_1(h),\dots,g'_n(a) + \rho_n(h))$. Notera

$$\implies F(a+h) - F(a) = f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})$$

Eftersom f är diff.bar kan den linjäriseras:

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{h} \bullet \nabla f(\boldsymbol{a}) + \|\boldsymbol{h}\|\, \rho(\boldsymbol{h}) \qquad \text{där } \rho(\boldsymbol{h}) \to 0, \boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h)-F(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{h} \bullet \nabla f(\boldsymbol{a}) + \|\boldsymbol{h}\|\,\rho(\boldsymbol{h})}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(h\left[\sum_{p=1}^{n} (g_p'(a)+\rho_p(h)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_p}(\boldsymbol{a})\right] + |h| \sqrt{\sum_{p=1}^{n} (g_p'(a)+\rho_p(h))^2} \cdot \rho(\boldsymbol{h}) \right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{p=1}^{n} g_p'(a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_p}(\boldsymbol{a})}_{\text{HL, ej } h\text{-beroende}} + \lim_{h\to 0} \Big[\underbrace{\sum_{p=1}^{n}}_{\text{ändlig}} \underbrace{\rho_p(h)}_{\to 0} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_p}(\boldsymbol{a})}_{\text{konst.}} \pm \underbrace{\rho(\boldsymbol{h})}_{\to 0} \underbrace{\sqrt{\sum_{p=1}^{n} (g_p'(a)+\rho_p(h))^2}}_{\text{konst.}} \Big]$$

Dvs. eftersom den första termen är oberoende av h, $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$ då $h \to 0$ (och $|h|/h = \pm 1$) går det sista gränsvärdet mot noll och beviset är klart. □

Sats* (2.5.9, Clairauts sats)**.** *$f \in C^k(D)$ där $D \subseteq \mathbb{R}^n$ domän $\implies$ Ordningen i vilken man tar partiella derivator spelar ingen roll upp till ordn. k.*

Bevis. (för $n = k = 2$, kan generaliseras med induktion på k), dvs. om $f(x,y) \in C^2(D), D \subseteq \mathbb{R}^2$ så $f_{xy} = f_{yx}$.

Låt $(a,b) \in D$, godtyckligt. Vill visa $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ för alla (a,b). Sätt $F(x) = f(x,b+h) - f(x,b)$, $G(y) = f(a+h,y) - f(a,y)$. Notera nu att

$$F(a+h)-F(a) = G(b+h)-G(b) = f(a+h,b+h)-f(a+h,b)-f(a,b+h)+f(a,b)$$

F,G deriverbara, så MVT ger:

$$F(a+h) - F(a) = hF'(\xi) = h[f_x(\xi,b+h) - f_x(\xi,b)] \quad \text{för ngt. } \xi \in (a,a+h)$$

$$G(b+h) - G(b) = hG'(\eta) = h[f_y(a+h,\eta) - f_y(a,\eta)] \quad \text{för ngt. } \eta \in (b,b+h)$$

Sätt uttrycken lika. Eftersom $f \in C^2$ kan MVT appliceras igen:

$$\begin{gathered} f_x(\xi,b+h) - f_x(\xi,b) = f_y(a+h,\eta) - f_y(a,\eta) \\ \cancel{h} f_{yx}(\xi,\theta) = \cancel{h} f_{xy}(\zeta,\eta) \end{gathered}$$

för några $\zeta \in (a,a+h)$ och $\theta \in (b,b+h)$. Låt nu $h \to 0 \implies \xi,\zeta \to a \quad \theta,\eta \to b$ tillsammans med f_{yx},f_{xy} kontinuerliga ger

$$f_{yx}(a,b) = f_{xy}(a,b)$$

□

Sats* (2.6.10, Taylors formel av ordn. 2, två variabler)**.** *Låt* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. *Låt* $f \in C^3(D)$ *där* D *är en omgivning av* (a,b)*. Då gäller*

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) = {} & f(a,b) + h \cdot f_x(a,b) + k \cdot f_y(a,b) + \\ & + \frac{1}{2}(h^2 \cdot f_{xx}(a,b) + 2hk \cdot f_{xy}(a,b) + k^2 \cdot f_{yy}(a,b)) + \\ & + O(\|(h,k)\|^3) \end{aligned}$$

Bevis. Vi använder kedjeregeln för att reducera till envariabels-Taylor. Fixera h,k och betrakta $F(t) = f(a+th,b+tk)$. Sätter vi $g_1(t) = a+th$, $g_2(t) = b+tk$ kan vi skriva $F(t) = f(g_1(t),g_2(t))$. Av kedjeregeln samt $f \in C^3(D)$ följer att $F \in C^3$ (för lämpliga t). Taylors sats (i en variabel) ger då

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + F''(0)\frac{t^2}{2} + F'''(\xi)\frac{t^3}{6} \qquad \text{för ngt. } \xi \text{ mellan } 0,t$$

Beräkna

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d}{dt} f(g_1(t),g_2(t)) = f_x(g_1(t),g_2(t)) \cdot g_1'(t) + f_y(g_1(t),g_2(t)) \cdot g_2'(t) = \\ &= hf_x(a+th,b+tk) + kf_y(a+th,b+tk) \end{aligned}$$

Vi kan definiera en differentialoperator $D : C^{k+1} \to C^k$ så att $F' = Df$:

$$D = h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$$

Analogt är då

$$\begin{aligned} F''(t) &= (F')' = D(Df) = (D \bullet D)f = D^2 f = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = \\ &= \left(\left(h\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \underbrace{2hk\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}}_{f\in C^2 \text{ – kommuterar}} + \left(k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right) f = h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy} \end{aligned}$$

$$F'''(t) = D^3 f = h^3 f_{xxx} + 3h^2 k f_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy}$$

Vi kan nu skriva upp hela formeln

$$\begin{aligned} f(a+th,b+tk) = f(a,b) + t\Big(hf_x(a,b) + kf_y(a,b)\Big) + \\ + \frac{t^2}{2}\Big(h^2 f_{xx}(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)\Big) + \\ + \frac{t^3}{6}\Big(h^3 f_{xxx}(a+\xi h,b+\xi k) + 3h^2 k f_{xxy}(a+\xi h,b+\xi k) + \\ + 3hk^2 f_{xyy}(a+\xi h,b+\xi k) + k^3 f_{yyy}(a+\xi h,b+\xi k)\Big) \end{aligned}$$

Sätt $t = 1 \implies \xi \in (0,1)$. Vi får de första termerna och behöver nu endast verifiera att feltermen är $O((h^2+k^2)^{3/2})$.

Då $f \in C^3$ så är alla partiella derivatorna kontinuerliga. På ett kompakt intervall är de begränsade av konstanter (jfr. Weierstrass sats). Varje monom i feltermen begränsas av derivatornas begränsning gånger $(h^2+k^2)^{3/2}$. (I detta fall är konstanten $4C/3$). $\square$

Sats* (6.1.3, kontinuerliga f. integrerbara på kompakta rektanglar)**.** *Låt $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ vara en axelparallell rektangel och låt $f : \Delta \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då gäller*

(i) $\underline{f \text{ är integrerbar över } \Delta}$*

(ii) *båda de itererade integralerna* $\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$ *och* $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$ *existerar*

(iii) $\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$

Bevis (i). Låt $\varepsilon > 0$ vara given. Vi vill visa att det finns trappfunktioner $\Phi,\Psi : \Delta \to \mathbb{R}$ s.a.

(a) $\Phi(x,y) \leq f(x,y)\ \forall (x,y) \in \Delta$

(b) $\Psi(x,y) \geq f(x,y)\ \forall (x,y) \in \Delta$

(c) $\iint_\Delta \Psi(x,y)\,dx\,dy - \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy < \varepsilon$

Då f är kontinuerlig och Δ kompakt så är f likformigt kontinuerlig, dvs.

$$\exists \delta > 0 \text{ s.a. } \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\| < \delta \implies |f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| < \frac{\varepsilon}{\text{Area}(\Delta)} \quad \forall \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2 \in \Delta$$

Välj partitioner av $[a,b]$ och $[c,d]$ s.a. diagonaler i varje delruta har längd $< \delta$. Betrakta sedan den (i,j):te rutan $[x_{i-1},x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Låt M_{ij} och m_{ij} vara maxvärdet resp. minvärdet av f på denna ruta (dessa finns ty rutan är kompakt och f är kontinuerlig). Vårt val av rutnät försäkrar nu att $M_{ij} - m_{ij} < \frac{\varepsilon}{\text{Area}(\Delta)}$.

Låt Φ resp. Ψ vara de trappfunktionerna som antar värdena m_{ij} resp. M_{ij} på delrutorna $[x_{i-1},x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$. Det är klart att (a) och (b) ovan gäller. Slutligen:

$$\iint_\Delta \Psi\,dx\,dy - \iint_\Delta \Phi\,dx\,dy = \sum_{i,j} (M_{ij} - m_{ij})(x_{i-1} - x_i)(y_{j-1} - y_j) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{\text{Area}(\Delta)} \sum_{i,j} (x_{i-1} - x_i)(y_{j-1} - y_j) = \frac{\varepsilon}{\text{Area}(\Delta)} \text{Area}(\Delta) = \varepsilon$$

□

Proposition* (6.6.21, gaussisk integral)**.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Bevis. Sätt $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \overset{(!!)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2}\,dx\,dy =$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2}\,dr\,d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \pi$$

$I^2 = \pi \iff I = \sqrt{\pi}$ (klart att $I > 0$). □

Proposition* (7.2.7, volymen av n-dim. enhetsklotet). *Låt* $\mu_n = \mathrm{vol}\,(B_n) = \mathrm{vol}\,\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n |\, \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$. *Då gäller* $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = \pi$, $\mu_n = \frac{2\pi}{n}\mu_{n-2}$ $\forall n \geq 3$.

Bevis.

$$B_n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\} =$$

$$= \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \;\middle|\; x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2 \right\} \implies$$

$$\mathrm{vol}\,(B_n) = \int \cdots \int_{B_n} dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_{B_{n-2}} dx_1 \cdots dx_{n-2} \left(\iint_C dx_{n-1}\, dx_n \right) =$$

$$= \int \cdots \int_{B_{n-2}} \pi \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2 \right) dx_1 \cdots dx_{n-2}$$

där C är cirkelskivan $x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2$ (notera att HL fixt inuti dubbelintegralen) vilken vi uppenbarligen vet radien och därmed arean på.

Låt $g(x_1, \ldots, x_{n-2}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} x_i^2}$ och $h(u) = 1 - u^2$. Det gäller då att $B_{n-2} = \{(x_1, \ldots, x_{n-2}) \mid 0 \leq g(x_1, \ldots, x_{n-2}) \leq 1\}$.

$$\implies \mu_n = \pi \int_0^1 h(u) V'(u)\, du$$

där $V(u) = \mathrm{vol}\,\{(x_1, \ldots, x_{n-2}) \mid 0 \leq g(x_1, \ldots, x_{n-2}) \leq u\} = \mathrm{vol}\,(B_{n-2}^u) = \mu_{n-2} u^{n-2}$

där B_{n-2}^u är det $(n-2)$-dimensionella klotet av radie u (och ”volymen” därför är motsvarande enhetsklot skalat med en faktor u^{n-2}).

$$\implies \mu_n = \pi \int_0^1 (1 - u^2)(n-2)\mu_{n-2} u^{n-3}\, du =$$

$$= (n-2)\pi\mu_{n-2} \int_0^1 (1 - u^2) u^{n-3}\, du = (n-2)\pi\mu_{n-2} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) =$$

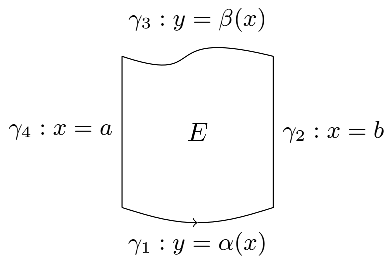
$$= \cancel{(n-2)}\pi\mu_{n-2} \frac{2}{\cancel{(n-2)}n} = \frac{2\pi}{n}\mu_{n-2}$$

$\square$

Sats* (9.2.1, Greens sats)**.** *Låt P och Q vara två C^1-funktioner definierade i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Om det kompakta delområdet $D \subset \Omega$ har en rand ∂D som utgörs av en eller flera styckvis C^1-kurvor, alla med positiv orientering m.a.p. D, så är*

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Bevis. Steg 1. Antag först att vi har ett område E som är reguljärt i x-led, dvs. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$, $\alpha,\beta \in C^1$.



Då är $\partial E = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ enligt figur. Det gäller att

$$\oint_{\partial E} P\,dx = \iint_E -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \qquad (\star)$$

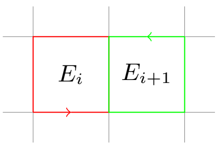
$$\text{VL} = \oint_{\partial E} P\,dx = \int_{\gamma_1} P\,dx + \underbrace{\cancelto{0}{\int_{\gamma_2} P\,dx}}_{\text{vertikal, } dx\,=\,0} + \int_{\gamma_3} P\,dx + \underbrace{\cancelto{0}{\int_{\gamma_4} P\,dx}}_{\text{vertikal, } dx\,=\,0} =$$

$$= \int_a^b P(x,\alpha(x))\,dx + \int_b^a P(x,\beta(x))\,dx = -\int_a^b \Big(P(x,\beta(x)) - P(x,\alpha(x)) \Big)\,dx$$

$$\text{HL} = \iint_E -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \overset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dy = -\int_a^b dx \Big(P(x,\beta(x)) - P(x,\alpha(x)) \Big) = \text{VL}$$

Steg 2. Antag att D kan partitioneras i ändligt många delområden av formen i steg 1, dvs. antag $D = \bigcup_{i=1}^n E_i$. Vi vet att för varje i gäller $(\star)$ ovan. Summera nu dessa partitioner över i.

HL: Klart att summan blir $\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$.



VL: Från figuren ser vi att kurvintegralerna längs alla interna sidor kancellerar, så summan blir till $\oint_{\partial D} P\,dx$.

Vi har bevisat att om D kan partitioneras i ändligt många delområden som är reguljära i x-led så gäller

$$\oint_{\partial D} P\,dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Steg 3. På samma sätt kan man visa att om D kan partitioneras i ändligt många delområden som är reguljära i y-led så gäller

$$\oint_{\partial D} Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

$\implies$ För ett reguljärt område, dvs. ett område som kan partitioneras på båda dessa sätt, så kan vi addera de två ekvationerna och har därmed visat

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

□

Sats* (9.4.2, kurvintegralen av ett konservativt fält är en potentialdifferens)**.** *Låt $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ett potentialfält med potential ϕ i det öppna området $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Då gäller för varje C^1-kurva γ i Ω att*

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r} = \phi(\boldsymbol{b}) - \phi(\boldsymbol{a})$$

där $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ är start- respektive slutpunkt för kurvan.

Bevis. Välj någon C^1-parametrisering för γ s.a. $\gamma = \{\boldsymbol{r}(t) \mid a \le t \le b\}$.

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \bullet \boldsymbol{r}'(t)\,dt = \int_a^b \nabla\phi(\boldsymbol{r}(t)) \bullet \boldsymbol{r}'(t)\,dt = \big\{\text{kedjeregeln}\big\} =$$
$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\phi(\boldsymbol{r}(t))\,dt = \phi(\boldsymbol{r}(b)) - \phi(\boldsymbol{r}(a)) = \phi(\boldsymbol{b}) - \phi(\boldsymbol{a})$$

□

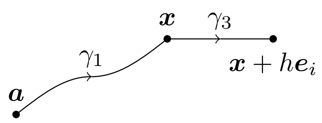
Sats* (9.4.3, existens av potential under förutsättningar)**.** *Låt $\boldsymbol{F}$ vara ett kontinuerligt fält i den öppna, bågvis sammanhängande (dvs. det finns minst ett γ enl. nedan) mängden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Om $\int_\gamma \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r}$ är oberoende av väg (dvs. för alla C^1-kurvor γ i Ω), då är $\boldsymbol{F}$ konservativt.*

Bevis. Välj en godtycklig baspunkt $\boldsymbol{a} \in \Omega$. Vi definierar en funktion $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ enligt $\phi(\boldsymbol{x}) = \int_\gamma \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r}$, där γ är en godt. C^1-kurva inom Ω som går från $\boldsymbol{a}$ till $\boldsymbol{x}$. Förutsättningarna innebär att ϕ är väldefinierad. Vi hävdar nu att $\boldsymbol{F} = \nabla\phi$. Sätt $\boldsymbol{F} = (F_1, \dots, F_n)$. Vi måste då visa att för $i = 1, \dots, n$ att $\phi'_{x_i} = F_i$. Fixera ett i. Per definition:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i) - \phi(\boldsymbol{x})}{h}$$

Infoga def. av ϕ enl. ovan så att

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r} \qquad \phi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i) = \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r}$$



där γ_1,γ_2 är valfri (styckvis) C^1-kurva inom Ω från $\boldsymbol{a}$ till $\boldsymbol{x}$ respektive $\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i$. Välj γ_2 så att den följer γ_1 till $\boldsymbol{x}$ och därefter går i en rak linje till $\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i$, dvs. $\gamma_2 = \gamma_1 + \gamma_3$ där $\gamma_3 = \{\boldsymbol{x} + ht\boldsymbol{e}_i \mid 0 \le t \le 1\}$ (då är γ_2 styckvis C^1).

$$\phi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i) - \phi(\boldsymbol{x}) = \int_{\gamma_3} \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x} + ht\boldsymbol{e}_i) \bullet h\boldsymbol{e}_i \, dt = h \int_0^1 F_i(\boldsymbol{x} + ht\boldsymbol{e}_i) \, dt$$

$$\implies \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \int_0^1 F_i(\boldsymbol{x} + ht\boldsymbol{e}_i) \, dt = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h F_i(\boldsymbol{x} + u\boldsymbol{e}_i) \, du = F_i(\boldsymbol{x})$$

ty integralen är ett medelvärde av F_i på sträckan med längd h och F_i är kontinuerlig. □

Sats* (10.5.3, varje potentialfält som är C^1 är virvelfritt.)**.** *Om $\boldsymbol{F}$ är konservativt i den öppna mängden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ med potential $\phi \in C^2$, då är $\boldsymbol{F}$ virvelfritt.*

Bevis. $\boldsymbol{F}$ konservativt $\implies \boldsymbol{F} = \nabla \phi$

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla \times (\nabla \phi) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) = \\ &= \mathbf{0} \qquad \text{ty } \phi \in C^2 \implies \text{Clairaut gäller} \end{aligned}$$

□

Sats* (10.2.1, Gauss divergenssats)**.** *Låt $\boldsymbol{F} = (F_1,F_2,F_3)$ vara ett C^1-fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Om det kompakta området $K \subseteq \Omega$ har en rand ∂K som består av en eller flera C^1-ytor och som är orienterad med utåtriktad normal så gäller*

$$\oiint_{\partial K} \boldsymbol{F} \bullet \hat{\boldsymbol{N}}\, dS = \iiint_K \nabla \bullet \boldsymbol{F}\, dV$$

Bevis. Steg 1. Antag först att K är reguljär m.a.p. z, dvs.

$$K = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ och } f(x,y) \leq z \leq g(x,y)\right\}, \text{ där } f,g \in C^1.$$

Under denna förutsättning ska vi visa att

$$\oiint_{\partial K} (0,0,F_3) \bullet \hat{\boldsymbol{N}}\, dS = \iiint_K \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

HL: Fubini ger direkt att

$$\iint_D dx\, dy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dz = \iint_D \left[F_3(x,y,g(x,y)) - F_3(x,y,f(x,y))\right] dx\, dy$$

VL: På den del av ytan som går runt z-axeln så är $\hat{\boldsymbol{N}}$ horisontell (kan ses med bild; ingen z-komponent). Här blir integralen då noll. Kvar återstår bara ytorna ovanpå och under.

$$\implies \oiint_{\partial K} (0,0,F_3) \bullet \hat{\boldsymbol{N}}\, dS = \iint_{\text{topp}} (0,0,F_3) \bullet \hat{\boldsymbol{N}}\, dS + \iint_{\text{botten}} (0,0,F_3) \bullet \hat{\boldsymbol{N}}\, dS$$

Betrakta toppen: $\hat{\boldsymbol{N}}\, dS = +(-g_x, -g_y, 1)\, dx\, dy$ (+ ty flödet ut söks).

$$\implies \iint_{\text{topp}} F_3\, dx\, dy = \iint_D F_3(x,y,g(x,y))\, dx\, dy$$

P.s.s. kan integralen för botten skrivas om (med normal som pekar nedåt ty flödet ut söks:

$$\implies \iint_{\text{botten}} F_3\, dx\, dy = -\iint_D F_3(x,y,f(x,y))\, dx\, dy$$

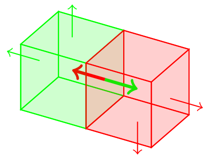
$\implies$ VL = HL.

Steg 2. Antag att K kan partitioneras i ändligt många sådana områden, säg $K_1, \ldots, K_n$. För varje $i = 1, \ldots, n$ gäller då enligt ovan

$$\oiint_{\partial K_i} (0,0,F_3) \bullet \hat{\boldsymbol{N}}\, dS = \iiint_{K_i} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

Summera över i.
HL: Klart att summan är

$$\iiint_K \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$



VL: Eftersom interna flöden kancellerar varandra då normalerna är motriktade (se figur) är summan

$$\oiint_{\partial K} (0{,}0{,}F_3) \bullet \hat{\boldsymbol{N}}\, dS$$

Steg 3. P.s.s. om K kan partitioneras i ändligt många delar som är reguljära m.a.p. y fås

$$\oiint_{\partial K} (0{,}F_2{,}0) \bullet \hat{\boldsymbol{N}}\, dS = \iiint_K \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dx\, dy\, dz$$

P.s.s. om K kan partitioneras i ändligt många delar som är reguljära m.a.p. x fås

$$\oiint_{\partial K} (F_1{,}0{,}0) \bullet \hat{\boldsymbol{N}}\, dS = \iiint_K \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dx\, dy\, dz$$

Steg 4. Om K är reguljärt (kan partitioneras på alla tre sätt) kan vi addera ekvationerna (de gäller alla) och vi får

$$\oiint_{\partial K} \boldsymbol{F} \bullet \hat{\boldsymbol{N}}\, dS = \iiint_K \nabla \bullet \boldsymbol{F}\, dV$$

$\square$

Sats* (10.3.2, Stokes sats)**.** *Låt* $\boldsymbol{F} = (F_1,F_2,F_3)$ *vara ett* C^1*-fält definierat i en öppen mängd* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$*. Om* Y *är ett orienterat ytstycke i* Ω *med (positivt) orienterad rand* ∂Y *så gäller*

$$\oint_{\partial Y} \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r} = \iint_Y (\nabla \times \boldsymbol{F}) \bullet \hat{\boldsymbol{N}}\, dS$$

Bevis (specialfall). Vi bevisar satsen endast för en yta Y som är en del av en C^2-funktionsyta, dvs.

$$Y = \big\{(x,y,f(x,y)) \;\big|\; (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,\ f \in C^2\big\}$$

$$\begin{aligned}
\text{VL} = \oint_{\partial Y} \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r} = \oint_{\partial Y} (F_1,F_2,F_3) \bullet (dx, dy, dz) = \oint_{\partial Y} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \\
= \left\{\substack{\text{funktionsyta}\\ \text{kedjeregeln}}\right\} = \oint_{\pi(\partial Y)=\partial D} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy\right) = \\
= \oint_{\partial D} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial y}\right) dy = \\
= \{\text{Green}\} = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] dx\, dy
\end{aligned}$$

Var försiktig under utvecklingen med kedjeregeln. Vi har:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x} F_2 + \frac{\partial}{\partial x} F_3 \frac{\partial f}{\partial y} + F_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \\
= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + F_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

På samma sätt

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) + F_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Utför nu subtraktionen. Då $f \in C^2$ gäller Clairaut och de termer med både f_x och f_y tar ut varandra.

$$= \iint_D \left[-\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right] dx\, dy$$

Beviset är klart här, ty HL $= \iint_Y (\nabla \times \boldsymbol{F}) \bullet \hat{\boldsymbol{N}}\, dS$ där vi enkelt kan bestämma $\hat{\boldsymbol{N}}\, dS = +(-f_x, -f_y, 1)\, dx\, dy$ enligt formeln för funktionsyta och VL = HL. $\square$

Sats* (4.3.1, max/min-problem med två variabler, ett bivillkor)**.** *I en inre punkt* (a,b) *i* D_f *och i* D_g *som löser problemet att maximera eller minimera* $f(x,y)$ *under bivillkoret* $g(x,y) = 0$ *(då* $f,g \in C^1$*) gäller att "vektorerna* $\nabla f(a,b)$ *och* $\nabla g(a,b)$ *är parallella".*

Bevis. Välj en C^1-parametrisering $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ för bivillkoret. Sätt $F(t) = f(\boldsymbol{r}(t)) = f(x(t),y(t))$. Säg att (a,b) är en extrempunkt för f på kurvan $g = 0$ med $(a,b) = \boldsymbol{r}(t_0)$, säg.

Om f har en extrempunkt i (a,b) så måste $F(t)$ ha en extrempunkt i $t = t_0$, och därmed $F'(t_0) = 0$. Men enligt kedjeregeln

$$F'(t) = \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{r}(t)) = \nabla f(\boldsymbol{r}(t)) \bullet \boldsymbol{r}'(t)$$

$$\implies F'(t_0) = 0 = \nabla f(\boldsymbol{r}(t_0)) \bullet \boldsymbol{r}'(t_0) = \nabla f(a,b) \bullet \boldsymbol{r}'(t_0)$$

dvs. $\nabla f(a,b)$ är ortogonal mot tangenten till kurvan.

Men samma sak gäller för $\nabla g(a,b)$ ty vi har en nivåkurva till g. (Detta är känt sedan tidigare men kan visas genom att $0 = \frac{d}{dt} g(\boldsymbol{r}(t)) = \nabla g \bullet \boldsymbol{r}'(t)$.)

Två vektorer i planet ortogonala mot en tredje given vektor måste vara parallella (i bemärkelsen att de ligger på samma linje). $\square$