TMA660

Ruben Seyer <rubense@student.chalmers.se>

12 augusti 2019
med rättelser 23 december 2022

Satser markerade med * är på listan. I denna kurs ingår också ett antal definitioner explicit på teorilistan. Materialet presenteras med reservation för eventuella fel – se över, tänk igenom och jämför själv för bästa möjliga förståelse!

Den andra upplagan uppdaterar listan till det nya formatet och kompletterar med de satser som saknades. Tack till Martin Due (f18) för synpunkter och rättelser.

Förteckning över satser

Definition (4, s. 33, linjärt beroende)**.** Vektorerna $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ ($p \geq 2$) sägs vara **linjärt beroende** om någon av dem är en linjärkombination av de övriga.

Sats* (5, s. 36, beroendeekvationen)**.** *$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ linjärt beroende $\iff$ det finns tal $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ där minst ett $\lambda_j \neq 0$ så att*

$$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{u}_p = \mathbf{0} \tag{*}$$

Bevis. Vi visar båda riktningar var för sig.

Antag att $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ är linjärt beroende. Per definition innebär det att någon av dem är en linjärkombination av de övriga. Efter omnumrering kan vi utan inskränkning anta att detta är $\boldsymbol{u}_1$:

$$\boldsymbol{u}_1 = \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{u}_p$$

Detta är ekvivalent med att $\lambda_1 = -1$ i (*) och implikationen gäller.

Antag att det finns minst ett $\lambda_j \neq 0$. Efter omnumrering kan vi utan inskränkning anta att $\lambda_1 \neq 0$. Följande omskrivning av (*) görs:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{u}_p \\ -\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 &= \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{u}_p \\ \boldsymbol{u}_1 &= \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \frac{-\lambda_p}{\lambda_1} \boldsymbol{u}_p \end{aligned}$$

Alltså är $\boldsymbol{u}_1$ en linjärkombination av $\boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p$, vilket innebär per definition att de är linjärt beroende. Detta visar ekvivalensens andra riktning. □

Anmärkning. Av beviset och definitionen följer innebörden av *linjärt oberoende* och motsvarande: $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ linjärt oberoende $\iff$ $\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{u}_p = \mathbf{0}$ har endast den triviala lösningen.

Anmärkning. Det är möjligt att använda (*) som definition och i stället bevisa definitionen. Denna situation kan uppstå i en teorifråga och kräver i så fall endast att man hänvisar till definitionen av linjärkombination.

Sats* (3, s. 103, bassatsen)**.** *För rummet* $\mathbb{R}^n$ *gäller:*

1) *a) Det finns högst* n *linjärt oberoende vektorer i* $\mathbb{R}^n$

b) Det behövs n *vektorer för att spänna upp* $\mathbb{R}^n$

c) En bas för $\mathbb{R}^n$ *har exakt* n *element*

2) Givet n *vektorer i* $\mathbb{R}^n$ *gäller*

$$\begin{aligned} &\textit{de är en bas för } \mathbb{R}^n \\ \iff &\textit{ de spänner upp } \mathbb{R}^n \\ \iff &\textit{ de är linjärt oberoende} \end{aligned}$$

Bevis. Låt $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_p$ vara en uppsättning vektorer och $\boldsymbol{b} = (b_1,\ldots,b_n)^\mathsf{T}$ s.a.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (a_{11},\cdots,a_{1n})^\mathsf{T} \\ \boldsymbol{a}_2 &= (a_{21},\cdots,a_{2n})^\mathsf{T} \\ \vdots\ \ &\quad\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \boldsymbol{a}_p &= (a_{p1},\cdots,a_{pn})^\mathsf{T} \end{aligned}$$

Betrakta vektorekvationen

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_p\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{b} \tag{*}$$

vilken är ekvivalent med följande ekvationssystem (n ekv och p variabler):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{p1}x_p = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{p2}x_p = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{pn}x_p = b_n \end{cases} \tag{**}$$

Minns att (**) kan skrivas om till ett ekvivalent trappformat system. Beteckna denna omskrivning (***).

1 a) $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_p$ linj. ober.
$\iff$ (per def) (*) med $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ har endast lösn. $x_1 = \cdots = x_p = 0$
$\iff$ pivot i varje kolonn (inga fria variabler)
$\iff$ antalet pivot $= p =$ antalet kolonner $=$ antal vektorer
$\implies$ $p \le n$ (antal pivot $\le$ antal rader) $\implies$ högst n lin. ober. vektorer

1 b) $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_p$ spänner upp $\mathbb{R}^n$
$\iff$ (per def) $\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ finns linj. komb av $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_p$
$\iff$ (per def) (*) lösbar $\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$
$\iff$ (***) lösbar för alla högerled $\iff$ (***) har pivot i varje rad
$\iff$ antal pivot $= n =$ antal rader
$\implies$ $n \le p$ (antal rader $\le$ antal pivot, ej fler pivot än kolonner)

1 c) är en konsekvens av a och b dvs. $n = p$ för baser.

2) Antag $p = n$. $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ $\iff$ (1b) antal pivot $= n$ $\iff$ (antagande) antal pivot $= p$ $\iff$ (1a) $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ linj. ober. $\square$

Sats* (entydig koordinatrepresentation i bas)**.** *Antag* $\boldsymbol{e_1},\ldots,\boldsymbol{e_n}$ *bas för* $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$. *Då finns entydigt bestämda tal* $u_1,\ldots,u_n \in \mathbb{R}$ *så att* $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + u_n\boldsymbol{e_n}$. *(Motsvarar lemma 1, s. 28 i dim 1; sats 2, s. 29 i dim 2; sats 3, s. 30 i dim 3.)*

Bevis. Existens av $u_1,\ldots,u_n$: Det gäller att $\boldsymbol{e_1},\ldots,\boldsymbol{e_n}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$, och per definition av bas spänner då $\boldsymbol{e_1},\ldots,\boldsymbol{e_n}$ upp hela $\mathbb{R}^n$, och per definition av att spänna upp gäller då att $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som linj. komb. av basvektorerna, och per defintion av linj. komb. $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\ \exists u_1,\ldots,u_n : \boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + u_n\boldsymbol{e_n}$.

Entydighet. Antag att $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + u_n\boldsymbol{e_n}$ och $\boldsymbol{u} = u_1'\boldsymbol{e_1} + \cdots + u_n'\boldsymbol{e_n}$ för några skilda $u_1,\ldots,u_n$ och $u_1',\ldots,u_n'$. Subtrahera de två ekvationerna:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} &= (u_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + u_n\boldsymbol{e_n}) - (u_1'\boldsymbol{e_1} + \cdots + u_n'\boldsymbol{e_n})\\ \boldsymbol{0} &= (u_1 - u_1')\boldsymbol{e_1} + \cdots + (u_n - u_n')\boldsymbol{e_n}\end{aligned}$$

Eftersom $\boldsymbol{e_1},\ldots,\boldsymbol{e_n}$ är en bas är basvektorerna linjärt oberoende och ekvationen har därför endast den triviala lösningen, dvs. $u_j - u_j' = 0\ \forall j$ - motsägelse! Koefficienterna är entydigt bestämda. □

Definition (1, s. 63, skalärprodukt)**. Skalärprodukten $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}$** av geometriska vektorer $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ definieras som

$$\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} = \begin{cases} 0 & \text{om } \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \text{ eller } \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \\ |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta & \end{cases}$$

där θ är vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$.

Anmärkning. Om $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ sägs $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ vara ortogonala ($\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$).

Definition (2, s. 85, vektorprodukt)**. Vektorprodukten $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$** av geometriska vektorer $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, där $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ är linjärt oberoende, definieras som den *unika* vektor $\boldsymbol{w}$ som

- $\boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{v}$
- $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{w}$ är positivt orienterade
- $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin\theta$ där θ är vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$.

Om $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ är linjärt beroende så definieras $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

Anmärkning. $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$ motsvarar arean av parallellogrammet som spänns av $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$.

Definition (3, s. 85, skalärtrippelprodukt)**. Skalärtrippelprodukten** av geometriska vektorer $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{w}$ definieras som $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \bullet \boldsymbol{w}$

Sats* (2, s. 86, volym av parallellepiped)**.** *Låt V vara volymen av parallellepipeden som spänns av $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{w}$. Då gäller följande:*

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \bullet \boldsymbol{w} = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}| \cos\theta = \begin{cases} V & \textit{om } \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \textit{ pos. orienterade} \\ -V & \textit{om } \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \textit{ neg. orienterade} \end{cases}$$

Bevisidé. Antag $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{w}$ pos. orienterade. Volymen är basarean gånger höjden. Basarean är ett parallellogram med area $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$ enl. def av kryssprodukt och höjden är då projektionen av $\boldsymbol{w}$ på kryssprodukten $\implies$ $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \bullet \boldsymbol{w}$. □

Sats* (1, s. 65, projektionsformeln)**.** *Anta* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. *Då gäller* $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ *har en unik uppdelning* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}^{\perp}$ *där*

- $\boldsymbol{u}' \parallel \boldsymbol{v}$
- $\boldsymbol{u}^{\perp} \perp \boldsymbol{v}$

Bevis. Existens. Låt u' vara

$$\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v} \tag{*}$$

Denna vektor är trivialt parallell med $\boldsymbol{v}$ och det återstår att visa att den ger en uppdelning där $\boldsymbol{u}^{\perp}$ uppfyller kraven. Från (*) följer:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^{\perp} \bullet \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}') \bullet \boldsymbol{v} &\overset{\text{distr.}}{=} \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}' \bullet \boldsymbol{v} \overset{\text{per def.}}{=} \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} - \left(\frac{\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v}\right) \bullet \boldsymbol{v} \\ &= \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}}{\cancel{|\boldsymbol{v}|^2}}\cancel{|\boldsymbol{v}|^2} = \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{u}^{\perp} \perp \boldsymbol{v}\end{aligned}$$

Alltså finns en uppdelning $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}^{\perp}$ som uppfyller kraven.

Entydighet. Antag att följande uppdelningar finns ($\boldsymbol{u}' \neq \tilde{\boldsymbol{u}}'$, $\boldsymbol{u}^{\perp} \neq \tilde{\boldsymbol{u}}^{\perp}$):

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}^{\perp} \qquad \text{där } \boldsymbol{u}' \parallel \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}^{\perp} \perp \boldsymbol{v} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}}' + \tilde{\boldsymbol{u}}^{\perp} \qquad \text{där } \tilde{\boldsymbol{u}}' \parallel \boldsymbol{v},\ \tilde{\boldsymbol{u}}^{\perp} \perp \boldsymbol{v} \tag{2}$$

Tag ekvation (1) − ekvation (2):

$$\mathbf{0} = (\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}^{\perp}) - (\tilde{\boldsymbol{u}}' + \tilde{\boldsymbol{u}}^{\perp}) \iff \underbrace{\tilde{\boldsymbol{u}}' - \boldsymbol{u}'}_{\parallel \boldsymbol{v}} = \underbrace{\boldsymbol{u}^{\perp} - \tilde{\boldsymbol{u}}^{\perp}}_{\perp \boldsymbol{v}}$$

(Ortogonaliteten av differensen följer av distributiva lagen för skalärprodukt.) Då vektorn är både parallell och ortogonal följer att $\tilde{\boldsymbol{u}}' - \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}^{\perp} - \tilde{\boldsymbol{u}}^{\perp} = \mathbf{0}$ (endast nollvektorn har denna egenskap). Detta medför att $\boldsymbol{u}' = \tilde{\boldsymbol{u}}'$, $\boldsymbol{u}^{\perp} = \tilde{\boldsymbol{u}}^{\perp}$. Motsägelse! Alltså är uppdelningen entydig. $\square$

Sats* (1 iv, s. 121, associativa lagen för matrisprod.). *Låt A, B och C vara $m \times n$-, $n \times p$- resp. $p \times q$-matriser. Då $(AB)C = A(BC)$.*

Bevis. Låt notationen A_{ij} beteckna elementet på rad i, kolonn j i matrisen A.

$$((AB)C)_{ij} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik} C_{kj} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{n} A_{il} B_{lk} \right) C_{kj}$$

Eftersom summan är ändlig är det tillåtet att byta ordning (och multiplikation med reella tal är associativ):

$$= \sum_{l=1}^{n} A_{il} \left(\sum_{k=1}^{p} B_{lk} C_{kj} \right) \overset{\text{def}}{=} \sum_{l=1}^{n} A_{il} (BC)_{lj} \overset{\text{def}}{=} (A(BC))_{ij}$$

□

Proposition* (lemma 2, s. 129, entydighet invers). *Om $VA = I$ och $AH = I$ så är $V = H$. Om A inverterbar så är inversen till A entydig.*

Bevis. Använd förutsättningar och associativa lagen:

$$V = VI = V(AH) = (VA)H = IH = H$$

Antag B och B' inverser till A. Då kan vi skriva $BA = I$ och $AB' = I$ så enligt ovan $B = B'$. □

Sats* (6, s. 137, basbyten). *Låt $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ och $\boldsymbol{e}'_1, \ldots \boldsymbol{e}'_n$ vara två baser för $\mathbb{R}$. Låt S vara basbytesmatrisen, dvs. matrisen $S = (\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n)^\mathsf{T}$ sådan att $\boldsymbol{s}_j$ är koordinaterna för $\boldsymbol{e}'_j$ i basen $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ dvs. $\boldsymbol{e}'_j = s_{1j}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + s_{nj}\boldsymbol{e}_n$.*

Låt $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ och $\boldsymbol{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)^\mathsf{T}$ vara koordinatvektorer för någon vektor $\boldsymbol{v} \in R^n$ i basen $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ respektive $\boldsymbol{e}'_1, \ldots \boldsymbol{e}'_n$. Då gäller

$$\boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}'$$

Bevis. Låt $E = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ och $E' = (\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$. Minns att vektorekvationerna kan skrivas om till matrisekvationer så att

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = E\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{v} &= x'_1\boldsymbol{e}'_1 + \cdots + x'_n\boldsymbol{e}'_n = E'\boldsymbol{x}' \qquad \Longrightarrow E\boldsymbol{x} = E'\boldsymbol{x}' \end{aligned}$$

Vidare gäller enligt förutsättningar

$$\boldsymbol{e}'_j = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \begin{pmatrix} s_{1j} \\ \vdots \\ s_{nj} \end{pmatrix} = E\boldsymbol{s}_j$$

$$\Longrightarrow ES = E(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n) = (E\boldsymbol{s}_1, \ldots, E\boldsymbol{s}_n) = (\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n) = E'$$

Slå samman dessa resultat till $E\boldsymbol{x} = ES\boldsymbol{x}'$. Då kolonnerna i E är en bas är den inverterbar och

$$\boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}'$$

□

Proposition* (online, minsta kvadratmetoden minimerar felet)**.** *Om $\overline{\boldsymbol{x}}$ är en lösning till $A^{\mathsf{T}}A\boldsymbol{x} = A^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}$ (normalekvationen) så är*

$$|A\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}| = \min |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}| \ \forall \boldsymbol{x}$$

Bevis. Minns att $|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + 2\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} + |\boldsymbol{v}|^2$.

$$|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|^2 = |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \ + A\overline{\boldsymbol{x}} - A\overline{\boldsymbol{x}}|^2 = |A(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) + (A\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b})|^2 =$$
$$|A(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})|^2 + 2(A(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})) \bullet (A\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}) + |A\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}|^2$$

Minns att $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}$ om $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ identifieras med kolonnvektorer. Betrakta termen i mitten:

$$A(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) \bullet (A\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}) = (A(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}))^{\mathsf{T}}(A\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})^{\mathsf{T}} \underbrace{A^{\mathsf{T}}(A\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b})}_{=\mathbf{0} \text{ givet enl. normalekvationen}} = 0$$

Då, enligt ovan:

$$|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|^2 = \underbrace{|A(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})|^2}_{\geq 0} + |A\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}|^2 \implies |A\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}|^2 \leq |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|^2$$

med likhet då $\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$. Minsta kvadratmetodens lösning minimerar felet. □

Sats* (1, s. 166)**.** *En avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär omm den är på formen $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ för någon $m \times n$-matris A. Givet en linjär avbildning f som ovan så är*

$$A = [f(\boldsymbol{e}_1) \cdots f(\boldsymbol{e}_n)] \tag{*}$$

avbildningsmatrisen i standardbasen då $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ är standardbasen för $\mathbb{R}^n$.

Bevis. Per definition är $f : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ linjär. För att visa resten antag f linjär och låt A vara given av (*). Behöver visa $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$). Vi gör två observationer:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \tag{a}$$

$$A\boldsymbol{e}_j = [\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_n]\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{a}_j = f(\boldsymbol{e}_j) \text{ enl. förutsättningar} \tag{b}$$

Då gäller för godt. $\boldsymbol{x}$

$$A\boldsymbol{x} \overset{\text{(a)}}{=} A(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) \overset{\text{distr.}}{=} x_1A\boldsymbol{e}_1 + \cdots x_nA\boldsymbol{e}_n \overset{\text{(b)}}{=}$$
$$\overset{\text{(b)}}{=} x_1f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_nf(\boldsymbol{e}_n) \overset{\text{lin.}}{=} f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) \overset{\text{(a)}}{=} f(\boldsymbol{x})$$

□

Definition (4, s. 244, determinant)**.** Låt $[n]$ beteckna mängden $\{1, \ldots ,n\}$. En *permutation* av $[n]$ är en bijektiv avbildning $p : [n] \to [n]$. Vi betecknar permutationen $p : [n] \to [n]$ sådan att $1 \mapsto p_1, 2 \mapsto p_2, \ldots , n \mapsto p_n$ med $p = [p_1, \ldots ,p_n]$, och mängden av alla permutationer av $[n]$ med S_n.

En *defekt* (inversion) i en permutation $p = [p_1, \ldots ,p_n]$ är ett par j,k där $j < k$ men $p_j > p_k$. p sägs vara jämn om antalet defekter är jämnt (och analogt för udda).

Signaturen av p betecknad $\sigma(p)$ är 1 om p jämn, annars -1 om p udda.

Determinanten av en $n \times n$-matris A är

$$\det A = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

Anmärkning. Det finns andra tänkbara definitioner av determinanten, t.ex. genom att den ska uppfylla alla räkneregler (och man fixerar $\det I = 1$) vilka man kan visa ger en unik funktion, eller genom underdeterminanter och den triviala definitionen $\det[a] = a$...

Sats* (9, s. 212, Huvudsatsen)**.** *För en kvadratisk matris A är följande ekvivalent:*

(i) *kolonnvektorerna utgör en bas*

(ii) *radvektorerna utgör en bas*

(iii) $AX = 0$ *har bara den triviala lösningen* $X = 0$

(iv) $AX = Y$ *lösbart för alla högerled*

(v) A *är inverterbar*

(vi) *linjära avbildningar med matrisen A är bijektiva*

(vii) $\det A \neq 0$

Beviset från grunden är för omfattande eftersom denna satsen endast sammanfattar och länkar tidigare satser. Man argumenterar med fördel utifrån bevis ovan — till exempel kan man få (i) (iii) (iv) från bassatsen och med (iv) lösa fram en högerinvers som då medför enligt entydigheten av invers (v) som i sig medför (iii) och så vidare. Se gärna sats 3, s. 127; sats 5, s. 133 och sats 5, s. 184.