TMA970

Ruben Seyer

oktober 2018

Satser markerade med * ingår i bevislistan. [Detta dokument inkluderar för närvarande endast de ”vanligaste” bevisen på tentamen.] Övriga resultat är av intresse för bevisen, för att lösa uppgifter eller har ev. förekommit som tidigare teorifrågor men är inte specifikt utpekade.

Förteckning över satser

Anmärkning (Egenskaper hos binomialkoefficienterna).

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$$

$$\binom{n}{0} \overset{\text{def}}{=} 1 \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Sats* (Binomialsatsen (kombinatoriskt))**.**

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Bevis. Induktion. 1) $n = 1$ ger $1 + x =$ VL HL $= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} x^k = \binom{1}{0} x^0 + \binom{1}{1} x^1 = 1 + x$, lika. (Vi tillåter i detta sammanhang att $0^0 = 1$).

2) Antag $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k$ för något $m \in \mathbb{N}$

3) Gäller då, under antagandet, att påståendet är sant för $m + 1$?

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)^m(1+x) \overset{2}{=} \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k\right)(1+x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{k+1}$$

Låt $k + 1 = l$. Skriv därefter samman summorna (summorna är oberoende av namn på index).

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k + \sum_{l=1}^{m+1} \binom{m}{l-1} x^l = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} x^k =$$
$$= \underbrace{1}_{k=0} + \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right)}_{\text{enl. ovan}} x^k + \underbrace{\overbrace{\binom{m}{m\cancel{+1-1}}}^{1} x^{m+1}}_{k=m+1} =$$
$$= \underbrace{1}_{=\binom{m+1}{0}} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} x^k + \underbrace{1}_{=\binom{m+1}{m+1}} \cdot x^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^k$$

Enligt induktionsaxiomet stämmer påståendet $\forall n \in \mathbb{N}$. ☐

Sats* (Talföljden vars gränsvärde kallas e)**.** $\exists \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Bevis. Det är tillräckligt att visa att talföljden är växande och uppåt begränsad. Låt

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

. Växande innebär att $a_n \leq a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Uppåt begränsad innebär att $\exists C$ s.a. $a_n \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}$.

För att visa att följden är växande kan man antingen visa att $a_{n+1} - a_n \geq 0$ eller $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ (givet $a_n \geq 0$). Eftersom uppenbart $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1$ kan vi använda det senare.

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^n = \\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n
\end{aligned}$$

Vi använder Bernoullis olikhet:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) \tag{1}$$

ty $1+\frac{1}{n+1} \geq 0$, $-\frac{1}{(n+1)^2} \geq -1$ (binomialsatsen hade ej varit lämplig).

$$\begin{aligned}
\implies (1) &= 1 - \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^3} = \\
&= \frac{(n+1)^3 - n(n+1) + (n+1)^2 - n}{(n+1)^3} = \\
&= \frac{(n+1)^3 - \cancel{n^2} - \cancel{n} + \cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{n}}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} > 1
\end{aligned}$$

$\implies a_n$ växande, det första villkoret.

Vi visar nu att a_n är uppåt begränsad. Utveckla med binomialsatsen:

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =
\end{aligned}$$

Observera att det finns lika många n-faktorer i täljare som i nämnare:

$$= 1 + 1 + \frac{1(1-\frac{1}{n})}{2} + \frac{1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!} + \cdots + \frac{1(1-\frac{1}{n})\cdots\frac{1}{n}}{n!} \tag{2}$$

Då alla täljare ≤ 1 så kan de ersättas av 1 och bli större. Eftersom $2^{n-1} \leq n!$ kan nämnarna ersättas och bli större.

$$(2) < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 1+1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 3$$

Följer vi olikheterna har vi funnit en övre begränsing till a_n.

a_n är växande och uppåt begränsad $\implies \exists \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{def}}{=} e$ $\square$

Definition (Derivatans definition 1)**.** Om $f : D_f \to \mathbb{R}$

- f kontinuerlig i D_f
- x_0 inre punkt till f för D_f
- $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (ändligt)

så $\exists f'$ i x_0 och är precis gränsvärdet.

Definition (Derivatans definition 2)**.** Om $f : D_f \to \mathbb{R}$

- f kontinuerlig i D_f
- x_0 inre punkt till f för D_f
- $\exists A \in \mathbb{R}$ s.a. $f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + h\epsilon(x_0,h)$
  där $\epsilon \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

så $\exists f'$ i x_0 och är precis A.

Lemma (Ekvivalenta definitioner av derivata)**.** *Derivatans definitioner 1 och 2 är ekvivalenta.*

Bevis. 1) f deriverbar i x_0 enligt definition 1. Derivatans värde är oberoende av h:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= f'(x_0)\\ \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right) &= 0\\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h} &= 0\end{aligned}$$

Sätt

$$\epsilon(x_0,h) = \begin{cases} 0 & \text{då } h = 0\\ \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h} & \end{cases}$$

dvs. $\epsilon \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ och f är deriverbar enligt definition 2.

2) f deriverbar i x_0 enligt definition 2 $\implies$ $\exists A \in \mathbb{R}$: (där $\epsilon \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ och $h \neq 0$ annars är det trivialt sant)

$$\begin{aligned}f(x_0+h) &= f(x_0) + Ah + h\epsilon(x_0,h)\\ f(x_0+h) - f(x_0) &= Ah + h\epsilon(x_0,h)\\ \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= A + \epsilon(x_0,h) \xrightarrow[h\to 0]{} A = f'(x_0)\end{aligned}$$

Därmed är de två definitionerna ekvivalenta. $\square$

Sats* (Kedjeregeln (m.h.a def. 2))**.** *Givet dessa villkor:*

$$
\begin{aligned}
f &: D_f \to \mathbb{R} & t_0 &\textit{ inre punkt för } f \\
g &: D_g \to D_f & x_0 &\textit{ inre punkt för } g \\
g(x_0) &= t_0 & \exists g' &\textit{ i pkt } x_0, \exists f' \textit{ i pkt } t_0
\end{aligned}
$$

så gäller följande:

$$\implies \exists (f \circ g)'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot \overbrace{g'(x_0)}^{\textit{inre derivata}}$$

Bevis. Givet är följande:

$$
\begin{aligned}
\exists A &: f(t_0 + k) = f(t_0) + Ak + k\epsilon_1(t_0,k) & \text{där } \epsilon_1 \xrightarrow[k\to 0]{} 0 \text{ ty } \exists f' \text{ i } t_0 \\
\exists B &: g(x_0 + h) = g(x_0) + Bh + h\epsilon_2(x_0,h) & \text{där } \epsilon_2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \text{ ty } \exists g' \text{ i } x_0
\end{aligned}
$$

Är det så att:

$$?\exists C : f(g(x_0 + h)) = f(g(x_0)) + Ch + h\epsilon(x_0,h) \quad \text{där } \epsilon \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Enligt givna ekvationer:

$$
\begin{gathered}
f(g(x_0 + h)) = f(\underbrace{g(x_0)}_{t_0} + \underbrace{Bh + h\epsilon_2(x_0,h)}_{\text{sätt } k}) = f(t_0 + k) = \\
f(t_0) + A(Bh + h\epsilon_2) + (Bh + h\epsilon_2)\epsilon_1 = \\
f(g(x_0)) + \underbrace{AB}_{C} h + h \underbrace{(A\epsilon_2 + B\epsilon_1 + \epsilon_1\epsilon_2)}_{\epsilon}
\end{gathered}
$$

Vi studerar om det valda ϵ uppfyller kravet att $\epsilon \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

$$f(g(x_0)) + ABh + h(\cancelto{0}{A\epsilon_2} + \cancelto{?}{B\epsilon_1} + \cancelto{?\,0}{\epsilon_1\epsilon_2})$$

Vi vet att $\epsilon_1 \xrightarrow[k\to 0]{} 0$, så vi visar att $k \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

$$k = Bh + h\epsilon_2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \implies \epsilon_1 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \implies \epsilon \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Därmed så $\exists (f \circ g)'(x_0) = C = AB = f'(t_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$. □

Sats* (Derivatan av en invers funktion)**.** *För den bijektiva* $f : D_f \to V_f$ *där* $x_0 \in D_f$*,* $y_0 = f(x_0)$*,* $\exists f'(x_0) \neq 0$ *och* f^{-1} *kontinuerlig i* y_0 *gäller*

$$\exists (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Bevis.

$$?\exists \lim_{k \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)}{k}$$

Sätt $h = f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)$.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(y_0 + k) &= f^{-1}(y_0) + h \\
f^{-1}(y_0 + k) &= x_0 + h \\
f(f^{-1}(y_0 + k)) &= y_0 + k = f(x_0 + h) \\
\implies k &= f(x_0 + h) - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0)
\end{aligned}$$

Observera att $h \xrightarrow[k \to 0]{} 0$ ty f^{-1} är kontinuerlig.

$$\implies \frac{f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)}{k} = \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)} \xrightarrow[k \to 0]{} \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\square$

Sats* (Rolles sats)**.** *Givet att* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*,* f *kontinuerlig i* $[a,b]$*,* f *deriverbar i* (a,b) *samt* $f(a) = f(b)$ *så gäller*

$$\exists \xi \in (a,b) \ \ s.a. \ f'(\xi) = 0$$

Bevis. Betrakta två fall.

1) $f \equiv \text{const}$ i $[a,b]$. Då $f'(\xi) = 0 \ \forall \xi \in (a,b)$.

2) $f \not\equiv \text{const}$ i $[a,b]$. Weierstrass sats ger att f antar både största och minsta värde i $[a,b]$ (eftersom f är kontinuerlig). Dessa punkter kan inte båda vara randpunkterna då det enligt $f(a) = f(b)$ medför att $f \equiv \text{const}$ vilket är uteslutet. Alltså finns det en inre punkt i intervallet där f antar största eller minsta värde. Då, enligt Fermats sats är derivatan i denna punkt noll, dvs. $\exists \xi \in (a,b)$ s.a. $f'(\xi) = 0$. □

Sats* (Lagranges medelvärdessats)**.** *Givet att* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*,* f *kontinuerlig i* $[a,b]$*,* f *deriverbar i* (a,b)*så gäller*

$$\exists \xi \in (a,b) \ \ s.a. \ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

Bevis. Ansätt en funktion

$$\phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

Vi visar att ϕ uppfyller kraven i Rolles sats.

$$\phi(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(a-a) = f(a)$$

$$\phi(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$$

$$\implies \exists \xi \ \phi'(\xi) = 0$$

Derivera och sätt in:

$$\phi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \iff f'(\xi)(b-a) = f(b) - f(a)$$

□

Sats* (Integralkalkylens medelvärdessats)**.** *Givet att* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *($b > a$) och f kontinuerlig i* $[a,b]$ *så* $\exists \xi \in [a,b]$*:* $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

Bevis. Då f är kontinuerlig i intervallet antar den största värde M och minsta värde m enligt Weierstrass: $m \leq f(x) \leq M \;\forall x \in [a,b]$. Minns att enligt integralräkneregler gäller (om $b > a$)

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

Notera att för konstanterna gäller att alla Riemann- och Darbouxsummor är konstanten gånger intervallbredden:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Dividera med $b-a$ (det var givet att differensen är positiv):

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{=\mu} \leq M$$

Enligt satsen om mellanliggande värden så $\exists \xi \in [a,b]$: $f(\xi) = \mu$ ty f kontinuerlig. $\square$

Anmärkning (Utvidgning av medelvärdessatsen)*.* Integralkalkylens medelvärdessats gäller även om $b < a$ (på det nya intervallet $[b,a]$) ty

$$\int_b^a f(x)\,dx = f(\xi)(a-b) \iff -\int_a^b f(x)\,dx = -f(\xi)(b-a)$$

Sats* (Analysens huvudsats). *Låt* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$*, där* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *är kontinuerlig i* $[a,b]$*. Då är* $F(x)$ *en primitiv till* $f(x)$ *i* $[a,b]$ *dvs.*

$$\exists (\int_a^x f(t)\,dt)' = f(x)$$

Bevis. Betrakta godtyckligt $x_0 \in (a,b)$ (i randpunkterna ensidigt).

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right) =$$

Vi kan anta att x_0 är en indelningspunkt oavsett tecken på h.

$$= \frac{1}{h}\left(\cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}\right) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt =$$

Integralkalkylens medelvärdessats gäller även den oavsett tecken på h.

$$= \frac{1}{h} f(\xi)(\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0} = f(\xi)$$

för något ξ mellan x_0, $x_0 + h$.

Enligt instängningsregeln kommer därför $\xi \xrightarrow[h\to 0]{} x_0$. Då f är kontinuerlig (speciellt i x_0) medför det att även $f(\xi) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_0)$.

$$\implies \exists \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0) \implies \exists F' = f \text{ i } x_0$$

□

Sats* (Partiell integration (primitiva funktioner))**.**

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Bevis. Derivera båda led.

$$f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)$$

Ekvivalent med produktregeln. □

Sats* (Eventuella rationella nollställen till polynom)**.** *Låt polynomet* $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *där* $a_n \neq 0$*,* $a_k \in \mathbb{Z}$*,* $k \in 0, \ldots, n$*. Antag att* $\alpha = \frac{p}{q}$ *är ett nollställe till* p*, där* $p \in \mathbb{Z}$*,* $q \in \mathbb{N}$*,* p,q *relativt prima. Då* $p \mid a_0$ *och* $q \mid a_n$ *(delar).*

Bevis. Vi vet att

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + \cdots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

Multiplicera med q^n:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

$$a_n p^n = \underbrace{-a_{n-1} p^{n-1} q - \cdots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n}_{\text{minst ett q i varje term}} = q \cdot \text{heltal}$$

$$\implies q \mid \text{HL} \implies q \mid \text{VL} = q \mid a_n p^n \implies q \mid a_n \text{ ty } p,q \text{ rel. prima}$$

På samma sätt $a_0 q^n = \cdots = p \cdot \text{heltal} \implies p \mid a_0$. □

Sats* (Ett standardgränsvärde)**.**

$$\frac{a^x}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty \quad \textit{då } \alpha > 0, a > 1$$

Bevis. Observera att

- $\forall x > 1\ \exists n \in \mathbb{N}$ s.a. $n \leq x < n+1$
  $x \to \infty \iff n \to \infty$
- $a > 1 \implies a = 1 + p,\ p > 0$

Vi uppskattar bort reell exponent i täljaren:

$$\frac{(1+p)^n}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{a^x}{x^\alpha} = \frac{(1+p)^x}{x^\alpha} \leq \frac{(1+p)^{n+1}}{n^\alpha}$$

Fall 1) $\alpha = 1$. Studera vänstra olikheten (som driver upp HL). Är det sant att $\frac{(1+p)^n}{(n+1)^\alpha} \to \infty$ när $n \to \infty$? Utveckla med binomialsatsen:

$$\frac{(1+p)^n}{(n+1)^\alpha} = \frac{1 + \binom{n}{1}p + \binom{n}{2}p^2 + \ldots + p^n}{n+1} \underset{(p>0)}{>} \frac{1 + \binom{n}{1}p + \binom{n}{2}p^2}{n+1} =$$

$$= \frac{1 + np + \frac{n(n-1)}{2}p^2}{n+1} = \frac{\overset{0}{\cancel{\frac{1}{n}}} + p + \overset{\infty}{\cancel{\frac{(n-1)}{2}p^2}}}{1 + \underset{0}{\cancel{\frac{1}{n}}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \implies \frac{(1+p)^n}{(n+1)^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$$\frac{a^x}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$$

Fall 2) Godtyckligt $\alpha > 0$. Låt $b = a^{1/\alpha} \implies b > 1$ då $\alpha > 0$.

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \left(\frac{a^{x/\alpha}}{x}\right)^\alpha = \left(\frac{(a^{1/\alpha})^x}{x}\right)^\alpha = \left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$$

ty b uppfyller kraven för fall 1 och $\alpha > 0$. $\square$