TMA976

Ruben Seyer <rubense@student.chalmers.se>

januari 2019

Satser markerade med * ingår i bevislistan. Övriga resultat är av intresse för bevisen, för att lösa uppgifter eller har ev. förekommit som tidigare teorifrågor men är inte specifikt utpekade.

Förteckning över satser

Anmärkning (Differentialoperatorer)*.* Definiera den linjära differentialoperatorn $\mathcal{L}$:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y \equiv \mathcal{L}[y] = f$$

för någon differentialekvation av ordn. n där koefficienterna inte nödvändigtvis är konstanta. Minns att

$$\mathcal{L}[y_1 + y_2] = \mathcal{L}[y_1] + \mathcal{L}[y_2] \qquad \mathcal{L}[\alpha y] = \alpha\mathcal{L}[y] \text{ för konst. } \alpha$$

Definiera $\mathrm{D} \equiv \frac{d}{dx}$ dvs. den vanliga differentialoperationen t.ex. $\mathrm{D}[y] = y'$, $\mathrm{D}^2[y] = y''$. Då gäller

$$\mathcal{L} = \mathrm{D}^n + a_{n-1}(x)\mathrm{D}^{n-1} + \cdots + a_1(x)\mathrm{D} + a_0(x) = P(\mathrm{D})$$

dvs. den linjära differentialoperatorn $\mathcal{L}$ kan beskrivas som ett polynom i D.

Sats* (Lösning av en linjär differentialekvation kan delas upp i en partikulärlösning och en homogenlösning)**.** *Låt $\mathcal{L}$ vara differentialoperatorn för en godt. linjär differentialekvation enligt ovan. Antag att $\mathcal{L}[y_p] = f$ dvs. y_p löser diff.ekv. Då gäller $\mathcal{L}[y] = f$ (y löser diff.ekv.) om och endast om $y = y_h + y_p$ där y_h är en homogenlösning till diff.ekv. dvs. $\mathcal{L}[y_h] = 0$.*

Bevis. Antag $y = y_h + y_p$:

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[y_h + y_p] = \mathcal{L}[y_h] + \mathcal{L}[y_p] = 0 + f = f$$

och y löser diff.ekv.

Antag y löser diff.ekv. dvs. $f = \mathcal{L}[y]$. Låt $y_h = y - y_p$.

$$\mathcal{L}[y_h] = \mathcal{L}[y - y_p] = \mathcal{L}[y] - \mathcal{L}[y_p] = f - f = 0$$

dvs. y_h är en homogenlösning till diff.ekv. $\square$

Sats* (Lösningsformeln för en homogen linjär differentialekvation av ordning n med konstanta koefficienter)**.** *Givet den godt. homogena linjära differentialekvationen*

$$P(\mathrm{D}) = (\mathrm{D} - r_1)^{m_1} \cdots (\mathrm{D} - r_k)^{m_k}$$

där $r_1, \ldots, r_k$ *är rötter till* $P(r) = 0$ *så gäller att*

$$y(x) = e^{r_1 x} \cdot p_1(x) + \cdots + e^{r_k x} \cdot p_k(x)$$

där $p_j(x)$ *är ett godt. polynom av grad högst* $m_j - 1$, $j = 1, \ldots, k$.
$y(x)$ *ovan är en lösning till* $P(\mathrm{D})[y] = 0$ *och varje lösning kan skrivas på den formen.*

Bevis. Existens ($y(x)$ löser $P(\mathrm{D})[y] = 0$): Räcker att visa att $P(\mathrm{D})[e^{r_j x} p_j(x)] = 0 \ \forall j = 1, \ldots, k$.

$$P(\mathrm{D})[e^{r_j x} p_j(x)] = (\mathrm{D} - r_1)^{m_1} \cdots (\mathrm{D} - r_k)^{m_k} [e^{r_j x} p_j(x)] = \{\text{förskjutningsregeln}\} =$$

$$= e^{r_j x} \cdot (D - r_1 + r_j)^{m_1} \cdots D^{m_j} \cdots (D - r_k + r_j)^{m_k} [\underbrace{p_j(x)}_{\text{högst grad } m_j - 1}]$$

$$\implies D^{m_j}[p_j(x)] = 0 \implies P(\mathrm{D})[y] = 0$$

Varje lösning kan skrivas på denna form: Görs via induktion.

I(k): För varje linjär diff-operator med konstanta koefficienter $\tilde{P}(\mathrm{D})$ gäller att om $\tilde{P}(r)$ (det karakteristiska polynomet) har högst k olika nollställen kan varje lösning till $\tilde{P}(\mathrm{D})$ skrivas på formen för $y(x)$.

I(1): Antag $(\mathrm{D} - r)^m [y(x)] = 0$.

$$e^{-rx} (\mathrm{D} - r)^m [y(x)] = 0 \cdot e^{-rx} = 0$$

Förskjutning baklänges ger

$$e^{-rx} (\mathrm{D} - r)^m [y(x)] = \mathrm{D}^m [e^{-rx} y(x)] = 0$$

vilket endast kan stämma om $e^{-rx} y(x)$ är ett polynom av grad högst $m - 1$. Låt detta polynom vara $p(x)$ och det följer att

$$y(x) = e^{rx} p(x)$$

Basfallet sant.

I(k − 1) $\implies$ ***I(k)***: Antag $I(k-1)$ sant.
Antag vidare $(\mathrm{D} - r_1)^{m_1} \cdots (\mathrm{D} - r_k)^{m_k} [y(x)] = 0$, vilket är ekvivalent med

$$(\mathrm{D} - r_1)^{m_1} \cdots (\mathrm{D} - r_{k-1})^{m_{k-1}} [(\mathrm{D} - r_k)^{m_k} [y(x)]] = 0$$

Sätt $z(x) = (\mathrm{D} - r_k)^{m_k} [y(x)]$.
Då är $z(x)$ en lösning till $(\mathrm{D} - r_1)^{m_1} \cdots (\mathrm{D} - r_{k-1})^{m_{k-1}} [\tilde{y}(x)] = 0$
$I(k-1) \implies z(x) = e^{r_1 x} q_1(x) + \cdots + e^{r_{k-1} x} q_{k-1}(x)$ där $q_j(x)$ polynom av grad högst $m_j - 1$. Vi har

$$(\mathrm{D} - r_k)^{m_k} [y(x)] = z(x) = e^{r_1 x} q_1(x) + \cdots + e^{r_{k-1} x} q_{k-1}(x)$$

Multiplicera detta med $e^{-r_k x}$:

$$\mathrm{D}^{m_k}[e^{-r_k x}y(x)] = e^{(r_1 - r_k)x}q_1(x) + \cdots + e^{(r_{k-1}-r_k)x}q_{k-1}(x)$$

Notera att differensen av rötterna är nollskild. Upprepad partiell integration $c \neq 0$, $q(x)$ polynom ger

$$\int e^{cx}q(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}e^{cx}q(x) - \int \frac{1}{c}e^{cx}q'(x)\,\mathrm{d}x = \cdots = e^{cx}p(x) + C_1$$

där graden för q är graden för p och C_1 godt. konstant. Detta ger oss

$$e^{-r_k x}y(x) = e^{(r_1 - r_k)x}p_1(x) + \cdots + e^{(r_{k-1}-r_k)x}p_{k-1}(x) + p_k(x)$$

där $p_j(x)$ är polynom av grad högst $m_j - 1$, $j = 1, \ldots, k$.

$$\implies y(x) = e^{r_1 x} \cdot p_1(x) + \cdots + e^{r_k x} \cdot p_k(x)$$

Implikationen sann.

Enligt $I(1)$, $I(k-1) \implies I(k)$ samt induktionsaxiomet följer att $I(k)$ är sant $\forall k \in \mathbb{N}$. $\square$

Sats* (Taylors formel)**.** *Antag* $f \in C([\alpha,\beta]) \cap C^{n+1}((\alpha,\beta))$ *med* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ *och* $a \in (\alpha,\beta)$*. Då gäller*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

På Lagranges form: $R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ *för något* ξ *mellan* x,a*.*

Bevis (Fallet $a=0$*).* Fixera $x \in I = (\alpha,\beta)$.

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{P.I.}}{=} f(0) + \big[\underbrace{(t-x)}_{\text{vald, x konst.}} f'(t)\big]_0^x - \int_0^x (t-x)f''(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \int_0^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{P.I.}}{=}$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} f(0) + f'(0)x + \left[-\frac{(x-t)^2}{2}f''(t)\right]_0^x - \int_0^x \left(-\frac{(x-t)^2}{2}\right) f'''(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,\mathrm{d}t = \{\text{upprepad part. int.}\}$$

Upprepad partiell integration enligt samma mönster ger slutsatsen

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{R_{n+1}(x)}$$

Återstår att visa resttermen stämmer dvs $R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ för något $\xi = \theta x$ där $\theta \in [0,1]$.

Antag $x > 0$: $t \in [0,x]$ så finns värden $m \le f^{(n+1)}(t) \le M$ ty $f^{(n+1)}$ kontinuerlig (Weierstrass) där $m = \min_{s\in[0,x]} f^{(n+1)}(s)$ och $M = \max_{s\in[0,x]} f^{(n+1)}(s)$. Multiplicera olikheten med $\frac{1}{n!}(x-t)^n$:

$$\frac{1}{n!}(x-t)^n \cdot m \le \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \le \frac{1}{n!}(x-t)^n \cdot M$$

Integrera från 0 till x:

$$\frac{m}{n!}\int_0^x (x-t)^n\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t \le \frac{M}{n!}\int_0^x (x-t)^n\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{m}{n!}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t \le \frac{M}{n!}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$f^{(n+1)}$ kontinuerlig på $[0,x]$ så satsen om mellanliggande värden (Bolzano) medför

$$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{1}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} \cdot \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \qquad \text{för ngt } \xi \in (0,x)$$

dvs. de två uttrycken för $R_{n+1}(x)$ är lika:

$$f^{(n+1)}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \qquad \text{för ngt } \xi \in (0,x)$$

(Fallet $x < 0$ visas p.s.s. med intervallet $[x,0]$) $\square$

Vi gör några lämpliga definitioner här för att förenkla notationen.

$$0! = 1 \qquad f^{(0)} \equiv f \qquad 0^0 \equiv 1$$

Bevis (Fallet $a \neq 0$). Sätt $g(t) = f(a+t)$.
Vi har $g^{(k)}(t) = f^{(k)}(a+t)$, $k = 1,2,\ldots,n+1$

$$f(a+t) = g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + g^{(n+1)}(\xi) \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{för ngt } \xi \text{ mellan } 0,t$$

Med $x = a+t$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + f^{(n+1)}(a+\xi) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$a+\xi$ ligger mellan a och $a+t = x$. Kan skriva $a+\xi = a + \theta(x-a)$, för något $\theta \in [0,1]$. $\square$

Alternativt bevis (CMT, $a = 0$). Fixera $x \in I$. Låt $g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$, $h(t) = (x-t)^{n+1}$. Notera

$$g(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad g(x) = f(x)$$
$$h(0) = x^{n+1} \qquad h(x) = 0$$

Antag $x > 0$. Sätt $\alpha = 0, \beta = x$. Beräkna derivatorna:

$$h'(t) = -(n+1)(x-t)^n$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k (x-t)^{k-1} \cdot (-1) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{l=1}^{n} \frac{f^{(l)}(t)}{(l-1)!}(x-t)^{l-1} = \{l = k+1\} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \end{aligned}$$

Använd Cauchys medelvärdessats - för något ξ mellan $(0,x)$ gäller:

$$(g(x) - g(0))h'(\xi) = (h(x) - h(0))g'(\xi)$$

$$\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) (-(n+1)\cancel{(x-\xi)^n}) = \left(0 - x^{n+1}\right) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cancel{(x-\xi)^n}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + f^{(n+1)}(\xi) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \ \xi \in (0,x)$$

Visa $x < 0$ p.s.s. $\square$

Anmärkning (Standardutvecklingarna av några elementära funktioner). Följande standardutvecklingar ingår på bevislistan:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{för } -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{för } -1 < x \leq 1$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{för } -1 < x < 1$$

Följande är omnämnda i ELW men inte alls lika vanliga (den förra har dock använts i tentalösningar tidigare):

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n \quad \text{för } -1 < x < 1$$

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{för } -1 < x < 1$$

Kan vara värt att lägga på minnet:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{för } -1 \leq x < 1$$

Bl.a. gäller att sinh, cosh, artanh har samma utvecklingar som sina trigonometriska motsvarigheter fast utan alternerande tecken.

$$\ln(\frac{1+x}{1-x}) = 2\,\mathrm{artanh}(x)$$

Sats* (Entydighet av Taylorutvecklingar)**.** *Antag I en omgivning till 0, $f \in C^{n+1}(I)$ och $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^{n+1}B(x)$ där B är en begränsad funktion på I. Då gäller $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $k = 0,1,\ldots,n$.*

Bevis. För $x \in I$ gäller

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^{n+1}B(x)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^{n+1}\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}_{\text{begränsad på I}}$$

för något ξ mellan $0,x$ (eftersom $f^{(n+1)}$ kontinuerlig på I runt 0).

Sätt $x = 0$ och vi får $a_0 = f(0)$. (Antag $x \neq 0$. Derivera båda uttryck för f och låt $x \to 0$. Vi får induktivt att $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.)

Antag $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ för $k = 0,1,\ldots,p$. Vi har nu

$$\begin{cases} a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_nx^n + x^{n+1}B(x) \\ \frac{f^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}x^{p+1} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^{n+1}B(x) \end{cases}$$

För $x \neq 0$ dividera med x^{p+1} och låt $x \to 0$. Vi får $a_{p+1} = \frac{f^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}$. Induktiv slutsats: $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ för $k = 0,1,\ldots,n$. □

Sats (Cauchys medelvärdessats)**.** *Antag*

- $f,g \in C([a,b]) \cap C^1((a,b))$
- $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$

Då gäller

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{för något } \xi \in (a,b)$$

Bevis. Sätt

$$h(x) = (f(b)-f(a)) \cdot g(x) - (g(b)-g(a)) \cdot f(x)$$

Uppenbart att $h \in C([a,b]) \cap C'((a,b))$ och $h(a) = h(b)$.
Enligt Rolles sats gäller då $h'(\xi) = 0$ för något $\xi \in (a,b)$. Studera $h'(\xi) = 0$:

$$(f(b)-f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b)-g(a)) \cdot f'(\xi)$$

Vi vet att $g'(\xi) \neq 0$ enligt förutsättningar, och $g(b)-g(a) = g'(\eta)(b-a)$ för något $\eta \in (a,b)$ enligt Lagranges medelvärdessats (nollskilt enligt förutsättningarna). Divsionen är definierad och satsen följer. □

Sats* (L'Hôpitals regel). *Antag*

1. $\begin{cases} f(x) \to 0 \\ g(x) \to 0 \end{cases}$ *då* $x \to x_0$ *eller* $g(x) \to \infty, x \to x_0$

2. *f,g deriverbara i* $(x_1,x_0) \cup (x_0,x_2)$
för några $x_1 < x_0 < x_2$ *och* g' *har konstant tecken i* (x_1,x_0) *och* (x_0,x_2) *var för sig (tecknet kan skilja sig åt mellan intervallen)*
(Analogt med $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (x_1,x_0) \cup (x_0,x_2)$*)*

3. $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Då gäller att det existerar egentligt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Anmärkning (Utökade fall L'Hôpitals regel). Gäller även i ensidiga fall då man bara betraktar ett av intervallen i unionen. Gäller även i i fall då $x_0 \to +\infty / x_0 \to -\infty$ om unionen ersätts med ett obegränsat intervall $(x_0, \infty)/(-\infty, x_0)$. Bevis för fall ej gjorda här är analoga.

Bevis (Fallet $f(x),g(x) \to 0$ *då* $x \to x_0^+$*).* Sätt $f(x_0) = g(x_0) = 0$. För $[x_0,x] \subset [x_0,x_2]$ gäller enligt Cauchys medelvärdessats (samt förutsättning 2):

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} \quad \text{för något } \xi \in (x_0,x)$$

Det gäller att $\xi(x) \to x_0^+$ när $x \to x_0^+$ (instängingsregeln). Då gränsvärdet $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar (3) följer att $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ existerar och är lika med det gränsvärdet. □

Bevis (Fallet $f(x),g(x) \to 0$ *då* $x \to \infty$*).* Sätt $x = 1/t$. Då gäller $x \to \infty \iff t \to 0^+$. Låt $f(x) = f(1/t) \equiv \tilde{f}(t)$ och $g(x) = g(1/t) \equiv \tilde{g}(t)$. Sätt $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = 0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)} \xrightarrow[t \to 0^+]{\text{fall ovan}} \lim_{t \to 0^+} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\cancel{-\frac{1}{t^2}} f'(1/t)}{\cancel{-\frac{1}{t^2}} g'(1/t)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Alltså $\exists \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ □

Bevis (Fallet $g(x) \to \infty$ *då* $x \to x_0^+$*).* Fixera $x_2 > x$ så att $g(x) > 0$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (x_0,x_2)$. För $x_0 < x < a < x_2$ gäller då Cauchys medelvärdessats:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{för något } \xi \in (x,a)$$

Omskrivning:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x)} = \frac{g(x) - g(a)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \frac{g(a)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a)}{g(x)}$$

Sätt $A = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Vi ska visa att det andra gränsvärdet är detsamma:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ \forall x \in (x_0,x_0+\delta) \implies \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \epsilon$$

Planen är att visa varje term $< \epsilon/3$ så summan $< \epsilon$. Fixera $\epsilon > 0$. Enligt antaganden (3) finns $a \in (x_0,x_2)$ så att för term 1:

$$\forall x \in (x_0, a) \implies \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \frac{\epsilon}{3}$$

Fixera detta a. För term 2:

$$\left|\frac{g(a)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| = \left|\frac{g(a)}{g(x)}\right| \cdot \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A + A\right| \overset{\Delta}{\leq} \left|\frac{g(a)}{g(x)}\right| \cdot \left(\underbrace{\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right|}_{<\epsilon/3 \text{ enl. ovan}} + |A|\right) \leq$$

$$\leq \left|\frac{g(a)}{g(x)}\right| \cdot \left(|A| + \frac{\epsilon}{3}\right) < \frac{\epsilon}{3}$$

Alltså

$$\exists b \in (x_0,a) \text{ s.a. } x \in (x_0,b) \implies \left|\frac{g(a)}{g(x)} \cdot (|A| + \frac{\epsilon}{3})\right| < \frac{\epsilon}{3}$$

För term 3 (trivialt ty $g(x) \to \infty$ och a fixt):

$$\exists c \in (x_0,b) \text{ s.a. } x \in (x_0,c) \implies \left|\frac{f(a)}{g(x)}\right| < \frac{\epsilon}{3}$$

Med $\delta = c - x_0$ gäller då att för $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \frac{g(a)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a)}{g(x)} - A\right| \overset{\Delta}{\leq}$$

$$\overset{\Delta}{\leq} \underbrace{\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right|}_{<\epsilon/3 \text{ enl. ovan}} + \underbrace{\left|\frac{g(a)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|}_{<\epsilon/3 \text{ enl. ovan}} + \underbrace{\left|\frac{f(a)}{g(x)}\right|}_{<\epsilon/3 \text{ enl. ovan}} < \epsilon$$

Påståendet följer. $\square$

(Kommentar: i mina anteckningar saknas ett $-A$ i h.l. för sista likhetstecknet ovan. Jag har korrigerat beviset så att det stämmer rent logiskt men observera att det kanske inte motsvarar vad som stod på tavlan den aktuella föreläsningen i så fall.)

Sats* (Fixpunktssats)**.** *Antag $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.*

1. *$f : [a,b] \to [a,b]$*
2. *f är en kontraktion på $[a,b]$, dvs.*
   $\exists k \in [0,1)$ s.a. $|f(x) - f(\tilde{x})| \le k|x - \tilde{x}| \quad \forall x,\tilde{x} \in [a,b]$
   (ekvivalent med Lipschitzvillkor med konstant < 1)

Då gäller

- *Finns entydigt bestämd fixpunkt $\bar{x} \in [a,b]$ s.a. $f(\bar{x}) = \bar{x}$*
- *För varje $x_0 \in [a,b]$ gäller att $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, där $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ konvergerar och har gränsvärdet $\bar{x}$*

Bevis. Entydighet. Antag $f(\bar{x}) = \bar{x}$ och $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

$$0 \le |\bar{x} - \tilde{x}| = |f(\bar{x}) - f(\tilde{x})| \underset{2.}{\le} k|\bar{x} - \tilde{x}| \implies |\bar{x} - \tilde{x}| = 0$$

Existens. Sätt $g(x) = x - f(x)$. Då f kontraktion medför det att f kontinuerlig. Alltså är g kontinuerlig på $[a,b]$. Vidare gäller

$$g(a) = a - f(a) \le 0 \text{ ty } f(a) \in [a,b] \qquad g(b) = b - f(b) \ge 0 \text{ ty } f(b) \in [a,b]$$

Satsen om mellanliggande värden (Bolzano) ger då $\exists \xi \in [a,b]$ s.a. $g(\xi) = 0$ dvs $f(\xi) = \xi$.

Talföljdens konvergens. Fixera $x_0 \in [a,b]$. Bilda $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ och låt $\bar{x}$ var den entydigt bestämda fixpunkten.

$$|x_{n+1} - \bar{x}| = |f(x_n) - f(\bar{x})| \underset{2.}{\le} k|x_n - \bar{x}| \underset{\text{p.s.s.}}{\le} k^2|x_{n-1} - \bar{x}| \le \cdots \le k^{n+1}|x_0 - \bar{x}|$$

$$k^{n+1}|x_0 - \bar{x}| \to 0,\ n \to \infty \text{ ty } k \in [0,1)$$

Alltså konvergerar $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ med godtyckligt x_0 och gränsvärdet är $\bar{x}$. □

Anmärkning (Fixpunktssats på $\mathbb{R}$). Med några modifikationer kan vi ha en kontraktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och visa att det finns en fixpunkt $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Notera att $|f(x) - f(0)| \le k|x|$ gäller, vilket också kan skrivas

$$f(0) - k|x| \le f(x) \le f(0) + k|x|$$

Då $\exists R > 0 : |f(0)| \le R(1-k)$ och det gäller att f är en kontraktion på $[-R,R]$.

$$x > R \implies x - f(x) \ge (1-k)x - f(0) \ge (1-k)(x-R) > 0$$

$$x < -R \implies x - f(x) \le (1-k)x - f(0) \le (1-k)(x+R) < 0$$

Detta tillsammans med fixpunktssatsen ger första delen. Talföljdens konvergens visas genom fixpunktssatsen på $f : [-\tilde{R},\tilde{R}]$ med $\tilde{R} = \max\{R,|x_0|\}$, eftersom f är en kontraktion på $[-\tilde{R}, R]$ $\forall \tilde{R} \ge R$.

Sats* (Integralkriteriet). *Antag* $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ *avtagande. Då gäller*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergerar} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergerar}$$

Bevis. För $x \in [k, k+1]$ gäller enligt förutsättningar

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$$

Integrera $f(x)$ från k till $k+1$ (existerar som Riemannintegral då f avtagande).

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k)$$

Låt $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$, $n \in \mathbb{N}$. Betrakta summationen från $k = 1$ till $k = n - 1$.

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

$$S_n - f(1) \leq \int_1^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_{n-1} \leq S_n$$

Om $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergerar så gäller

$$S_n \leq f(1) + \int_1^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \underbrace{f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{oberoende av } n} \in \mathbb{R}$$

Alltså $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ begränsad och serien konvergerar enligt huvudsatsen för positiva serier.

Om $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ divergerar så gäller $\int_1^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \to \infty$, $n \to \infty$. Integralen skjuter summan framför sig i olikheten $\implies$ $S_n \to \infty$, $n \to \infty$ och alltså divergerar serien. □

Sats* (Rotkriteriet)**.** *Antag*

- $a_n > 0 \; \forall n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$

Då gäller en *av*

- $A < 1$*:* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergerar*
- $A > 1$*:* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergerar*
- $A = 1$*: (inget kan sägas)*

Bevis. Betrakta två fall.

Antag $A < 1$: Välj $q \in \mathbb{R}$ så att $A < q < 1$. Då $\exists N$ så att $a_n \leq q^n \; \forall n \geq N$. Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergerar ty $q \in [0,1)$ så konvergerar även $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ enligt jämförelsekriteriet.

Antag $A > 1$: Då $\exists N$ så att $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \; \forall n \geq N$ dvs. $a_n \geq 1 \; \forall n \geq N$. Alltså $a_n \not\to 0$, $n \to \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar. $\square$

Anmärkning (Kvotkriteriet)*.* Analogt gäller samma villkor för $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Gränsvärdet för kvotkriteriet om det existerar är alltid detsamma som för rotkriteriet. Däremot kan man inte dra den omvända slutsatsen (speciellt fall då talföljden varierar mellan udda/jämna steg, eftersom detta framkommer i kvotkriteriet men ej i rotkriteriet).

Bevis. Antag att $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbb{R}$. Antag $a > 0$ (minns att $a_n \geq 0$). Fixera $\epsilon \in (0,a)$ och enligt gränsvärdet finns N så att

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - a \right| < \epsilon \qquad \forall n \geq N$$

Vidare gäller

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \qquad n > N$$

$$\implies (a-\epsilon)^{n-N} \cdot a_N < a_n < (a+\epsilon)^{n-N} \cdot a_N$$

Detta ger

$$(a-\epsilon)((a-\epsilon)^{-N} a_N)^{1/n} < \sqrt[n]{a_n} < (a+\epsilon)((a+\epsilon)^{-N} a_N)^{1/n}$$

som vid gränsövergång $n \to \infty$ ger

$$a - \epsilon < \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < a + \epsilon \iff |\sqrt[n]{a_n} - a| < \epsilon$$

vilket då ϵ är godt. litet innebär att $\sqrt[n]{a_n} \to a$, $n \to \infty$. (Beviset för $a = 0$ är analogt och kräver den ensidiga uppskattningen $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \epsilon$. Att det omvända ej är sant visas enklast med motexempel, t.ex. följden där $a_k = 1/k$ för udda k och $2/k$ för jämna k). $\square$

Sats* (Leibniz konvergenskriterium)**.** *Antag*

1. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Då gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ konvergerar}$$

Bevis. Sätt $S_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} a_n$, $N \in \mathbb{R}$. Betrakta $(S_{2N})_{N=1}^{\infty}$.

$$S_{2N} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2N-1} - a_{2N})}_{\geq 0} \leq S_{2N} + \underbrace{(a_{2N+1} - a_{2N+2})}_{\geq 0} = S_{2N+2}$$

(Markerade termer positiva enligt första förutsättningen.) Alltså $(S_{2N})_{N=1}^{\infty}$ växande talföljd.

$$S_{2N} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(a_{2N-2} - a_{2N-1})}_{\geq 0} - \underbrace{a_{2N}}_{\geq 0} \leq a_1$$

Alltså $(S_{2N})_{N=1}^{\infty}$ uppåt begränsad. Satsen om monotona talföljders konvergens ger $(S_{2N})_{N=1}^{\infty}$ konvergerar. Kalla gränsvärdet S, dvs. $S_{2N} \to S$, $N \to \infty$.

Men $S_{2N+1} = S_{2N} + a_{2N+1} \to S + 0 = S$, $N \to \infty$. Alltså $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ konvergerar också med gränsvärdet S. $\square$

Lemma (Symmetri i potensseriers konvergens)**.** *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konvergerar $\implies$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolutkonvergent $\forall |x| < |x_0|$*

Bevis. Antag att $x_0 \neq 0$ (annars trivialt sant). Konvergerar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ gäller $a_n x_0^n \to 0$, $n \to \infty$. Då finns N så att $|a_n x_0^n| \leq 1$ för $n \geq N$. Vi har

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \quad \text{för } n \geq N$$

För $|x| < |x_0|$ gäller $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ konvergerar. Jämförelsekriteriet ger att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ är absolutkonvergent $\forall |x| < |x_0|$. $\square$

Sats* (Om potensseriers konvergens)**.** *För potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gäller exakt ett av följande påståenden (där M är mängden av reella x som potensserien konvergerar för och R är konvergensradien):*

1. *Potensserien konvergerar endast för $x = 0$ ($M = \{0\}$ $R = 0$)*
2. *Potensserien är absolutkonvergent för alla reella x ($M = \mathbb{R}$ $R = \infty$)*
3. *$\exists R \in (0, \infty)$ s.a. potensserien är absolutkonvergent för alla $|x| < R$ och divergent för alla $|x| > R$ ($(-R, R) \subseteq M \subseteq [-R, R]$)*

Bevis. Fallet M obegränsad delmängd av $\mathbb{R}$. Fixera $x \in \mathbb{R}$. M obegränsad $\implies$ $\exists x_0 \in M$ s.a. $|x| < |x_0|$. Lemmat ger då att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolutkonvergent dvs. fall (2) gäller.

Fallet M begränsad delmängd av $\mathbb{R}$. Sätt $R = \sup M$, icke-negativt.

Om $R = 0$: Då gäller $M = \{0\}$, ty om $\tilde{x} \in M$ där $\tilde{x} < 0$ gäller $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$ (absolut)konvergent för $x = \frac{|\tilde{x}|}{2}$ enligt lemmat och detta motsäger definitionen av $R = \sup M$, dvs. fall (1) gäller.

Om $R > 0$: Antag $|x| > R$. Då gäller $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergent för om den skulle konvergera skulle potensserien konvergera för $x_1 = \frac{|x|+R}{2} > R$ enligt lemma vilket motsäger definitionen $R = \sup M$.
Antag $|x| < R$. Då gäller att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ är absolutkonvergent eftersom potenssserien konvergerar för $x_2 = \frac{|x|+R}{2}$, dvs. fall (3) gäller. $\square$

Anmärkning (Triangelolikheten för serier). Antag $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, där $b_k \in \mathbb{R}\ \forall k$, är absolutkonvergent. Då gäller $|\sum_{k=1}^{\infty} b_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$.

Bevis. Sätt $\sigma_n \equiv \sum_{k=1}^{n} b_k \to \sum_{k=1}^{\infty} b_k \equiv \sigma$, $n \to \infty$ då serien konvergerar. Alltså $|\sigma_n| = |\sum_{k=1}^{n} b_k| \overset{\Delta}{\leq} \sum_{k=1}^{n} |b_k| \to \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \equiv A$, $n \to \infty$ då serien absolutkonvergerar. Alltså $-A \leq \sigma_n \leq A\ \forall n$. Låt $n \to \infty$ och vi ser $-A \leq \sigma \leq A$ dvs. $|\sigma| \leq A$. □

Sats* (Weierstrass majorantsats)**.** *Antag* $f_k : I \to \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$

- $|f_k(x)| \leq a_k\ \forall x \in I,\ k \in \mathbb{N}$
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergerar*

Då gäller

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ konvergerar likformigt på } I$$

Bevis. Fixera godtyckligt $x \in I$. Förutsättningarna medför direkt att $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ är absolutkonvergent enligt jämförelsekriteriet för positiva serier. Eftersom varje absolutkonvergent serie konvergerar vanligt gäller att $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar punktvis på I (då x var godtyckligt). Kalla denna summa $s(x)$, $x \in I$.

Fixera godtyckligt $\epsilon > 0$. Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar $\exists N$ så att

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k| = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

Vi har för $x \in I$ gäller

$$|s(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \overset{\Delta}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \epsilon \quad \forall n \geq N, \forall x \in I$$

Detta gäller för ϵ oberoende av x vilket innebär per definition att $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt på I. □

Sats (Kontinuitet vid likformig konvergens, Sats 1)**.** *Antag*

1. $s_n \in C(I)$ *alla* n.
2. $s_n \to s$ *likformigt på* I

Då gäller $s \in C(I)$.

Bevis. Fixera $x \in I$. Fixera $\epsilon > 0$. För $x, \tilde{x} \in I$ gäller

$$|s(x) - s(\tilde{x})| = |(s(x) - s_n(x)) + (s_n(x) - s_n(\tilde{x})) + (s_n(\tilde{x}) - s(\tilde{x}))| \overset{\Delta}{\leq}$$

$$\overset{\Delta}{\leq} |s(x) - s_n(x)| + |s_n(x) - s_n(\tilde{x})| + |s_n(\tilde{x}) - s(\tilde{x})|$$

Givet att $s_n \to s$ likformigt på I dvs. finns N s.a. $n \geq N \implies |s_n(z) - s(z)| < \frac{\epsilon}{3}\ \forall z \in I$. Vi har då, för $n = N$

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{\epsilon}{3} + |s_N(x) - s_N(\tilde{x})| + \frac{\epsilon}{3}$$

$s_N \in C(I)$ medför att det finns $\delta > 0$ s.a. $\tilde{x} \in (x - \delta, x + \delta) \cap I \implies |s_N(x) - s_N(\tilde{x})| < \frac{\epsilon}{3}$. Alltså $\tilde{x} \in (x - \delta, x + \delta) \cap I \implies |s(x) - s(\tilde{x})| < \epsilon \implies s \in C(I)$. □

Sats* (Gränsövergång under integraltecknet vid likformig konvergens (slutet och begränsat intervall), Sats 2)**.** *Antag*

1. s_n *kontinuerlig på* $I = [a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *för alla* n.
2. $s_n \to s$ *likformigt på* I

Då gäller

$$\lim_{n \to \infty} \int_I s_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I s(x)\,\mathrm{d}x$$

Bevis. Sats 1 medför att $s \in C(I)$. Fixera $\epsilon > 0$. Då $s_n \to s$ likformigt på I gäller

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.a. } n \geq N \implies \sup_{x \in I} |s_n(x) - s(x)| < \frac{\epsilon}{b - a}$$

Det gäller

$$|\int_I s_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_I s(x)\,\mathrm{d}x| = |\int_I (s_n(x) - s(x))\,\mathrm{d}x| \overset{\Delta}{\leq} \int_I |s_n(x) - s(x)|\,\mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \int_I \sup_{x \in I} |s_n(x) - s(x)|\,\mathrm{d}x < \int_I \frac{\epsilon}{b - a}\,\mathrm{d}x = \epsilon \text{ för } n \geq N$$

Påståendet följer. □

Sats (Deriverbarhet vid likformig konvergens av derivator, Sats 3)**.** *Antag*

1. $s_n \in C^1(I)$ *för alla* n, *(*I *intervall).*
2. $s_n' \to g$ *likformigt på* I
3. $s_n \to s$ *punktvis på* I

Då gäller $s \in C^1(I)$ *och* $s' = g$.

Bevis. Sats 1 medför $g \in C(I)$. Fixera $a \in I$. Då gäller för $x \in I$.

$$\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \lim_{n\to\infty} s_n'(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{sats 2}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^x s_n'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} [s_n(t)]_a^x =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (s_n(x) - s_n(a)) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) - \lim_{n\to\infty} s_n(a) = s(x) - s(a)$$

Alltså $s(x) = s(a) + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in I$. Vi får $s \in C^1(I)$ och $s'(x) = g(x)$, $x \in I$. $\square$

Sats (Gränsövergång under integraltecknet för godt. intervall, Sats 2′)**.** *Antag*

1. $s_n \to s$ *punktvis på* I *(kan vara obegränsat)*
2. $\exists$ *en majorerande funktion* $g(x)$*:* $I \to [0,\infty)$ *dvs.*
   (a) $|s_n(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$
   (b) $\int_I g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ *(Riemannintegrerbar)*

Då gäller

$$\lim_{n\to\infty} \int_I s_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I s(x)\,\mathrm{d}x$$

(Bevisades ej under kursen.)

Sats (Gränsövergång under integraltecknet vid likformig konvergens, Sats $2''$)**.** *Antag*

1. s_n *kontinuerlig på* $I = [0,\infty)$ *för alla* n*.*
2. $s_n \to s$ *likformigt på* $[0,a]$ *för varje* $a > 0$
3. $\exists$ *en majorerande funktion* $g(x)$*:* $I \to [0,\infty)$ *dvs.*
   (a) $|s_n(x)| \le g(x)$, $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$
   (b) $\int_I g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ *(Riemannintegrerbar)*

Då gäller

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty s_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty s(x)\,\mathrm{d}x$$

Bevis. 1. $s \in C([0,\infty))$ enligt Sats 1.

2. $\int_0^\infty s(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$ (Riemannintegrerbar) eftersom $|s_n(x)| \le g(x)$ $\forall x$ $\forall n$ medför $|s(x)| \le g(x)$ $\forall x$. Jämförelsesats för generaliserade integraler ger att $\int_0^\infty s(x)\,\mathrm{d}x$ existerar.

3. Fixera $\epsilon > 0$. Fixera $L > 0$ s.a. $\int_L^\infty g(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\epsilon}{4}$. Vi har

$$\left|\int_0^\infty s_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty s(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^\infty (s_n(x) - s(x))\,\mathrm{d}x\right| \overset{\Delta}{\le} \int_0^\infty |s_n(x) - s(x)|\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^\infty |s_n(x) - s(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^L |s_n(x) - s(x)|\,\mathrm{d}x + \int_L^\infty \underbrace{|s_n(x) - s(x)|}_{\overset{\Delta}{\le}|s_n(x)|+|s(x)|\le 2g(x)}\,\mathrm{d}x \le$$

$$\le \int_0^L |s_n(x) - s(x)|\,\mathrm{d}x + \int_L^\infty 2g(x)\,\mathrm{d}x < \int_0^L |s_n(x) - s(x)|\,\mathrm{d}x + \frac{\epsilon}{2}$$

Men $s_n \to s$ likformigt på $[0,L]$ enligt förutsättning.
Sats 2 medför $\exists N$ s.a. $\int_0^L |s_n(x) - s(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\epsilon}{2}$ alla $n \ge N$. Slutsats:

$$\left|\int_0^\infty s_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty s(x)\,\mathrm{d}x\right| < \epsilon \quad \text{alla } n \ge N$$

$\square$

Anmärkning (Newton-Raphsons metod). Vi vill iterativt lösa ekvationen $f(\alpha) = 0$. N-R:s metod är en sådan iterativ metod. För varje approximation av roten x_n dras en tangent till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(x_n, f(x_n))$ och så söks skärningen med x-axeln, som är vår nya approximation. Tangentens ekvation är då $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ vilket ger rekursionsformeln

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

1. Antag att det finns en rot $f(\alpha) = 0$, $f \in C^2(I)$ på ett intervall I och α,x_n,$x_{n+1} \in I$. Då gäller

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|^2$$

för någon konstant C (om begynnelseapproximationen är tillräckligt nära).

Bevis. Taylorutveckla f kring x_n.

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2}f''(\eta_n)(\alpha - x_n)^2$$

för ngt η_n mellan α,x_n, vilket insatt i den rekursiva formeln ger

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \alpha = \frac{f''(\eta_n)}{2f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2$$

Om för $x \in I$ det gäller $|f''(x)| \leq K$ och $L \leq |f'(x)| \leq M$ så följer det att

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{K}{2L}|x_n - \alpha|^2$$

□

2. Antag att det finns en rot $f(\alpha) = 0$, $f \in C^1(I)$ på ett intervall I och α,x_n,$x_{n+1} \in I$, samt att uppskattningarna ovan för f' gäller. Då gäller

$$|x_n - \alpha| \leq \tilde{C}|x_n - x_{n+1}|$$

för någon konstant $\tilde{C}$.

Bevis.

$$|x_n - x_{n+1}| = \left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| \geq \frac{|f(x_n)|}{M} = \frac{1}{M}|f(x_n) - \underbrace{f(\alpha)}_{=0}| = \frac{1}{M}\underbrace{|f'(\xi_n)|}_{\geq L} \cdot |x_n - \alpha|$$

för något ξ_n mellan α,x_n (medelvärdessatsen). Omskrivning ger

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M}{L}|x_n - x_{n+1}|$$

□

Dessa uppskattningar är bättre än vad vi bara får av att f är Lipschitzkontinuerlig.

Anmärkning (Stirlings formel).

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

(Se uppskattningar på sid. 63 i ELW.)